6. 一変数関数の積分

6–1. 定積分の定義. 関数 $y = f(x)$ が有界閉区間 $[a,b] = \{x|a \leq x \leq b\}$ で有界とする。

- $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$：区間 $[a,b]$ の**分割**
  $I_i := [x_{i-1}, x_i]$：各小区間 $(i = 1,\dots,n)$、$|I_i| := x_i - x_{i-1}$：区間幅
  小区間の最大幅 $\max\limits_{1\leq i\leq n} |I_i|$ を $|\Delta|, \delta(\Delta)$ 等と書く。
- $m_i := \inf\limits_{x\in I_i} f(x),\ M_i := \sup\limits_{x\in I_i} f(x)$: 各小区間 I_i での関数値 $f(x)$ の下限・上限
- $s_\Delta := \sum\limits_{i=1}^{n} m_i|I_i|,\ S_\Delta := \sum\limits_{i=1}^{n} M_i|I_i|$
- $s := \sup\limits_{\Delta} s_\Delta,\ S := \inf\limits_{\Delta} S_\Delta$: f の $[a,b]$ での**下積分・上積分**
- f が $[a,b]$ で**積分可能** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} s = S$
  この時、$s = S =: \displaystyle\int_a^b f(x)dx$：$f$ の $[a,b]$ での**定積分**
- (**Darboux の定理**) $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$：分割の列で、$|\Delta_n| \to 0$ とする。この時、
  $s_{\Delta_n} \to s, S_{\Delta_n} \to S\ (n \to \infty)$。
- 定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る：
  $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists\Delta = \Delta_\varepsilon$：$[a,b]$ の分割 : $I - \varepsilon \leq s_\Delta, S_\Delta \leq I + \varepsilon$
- 次の Riemann 和を用いて定式化することもある：
  - ⋆ $\Xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$：各小区間から代表点を 1 つづつ選んだもの $(\xi_i \in I_i)$
    $I(\Delta,\Xi) := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ ：**Riemann 和**
  - ⋆ f が $[a,b]$ で積分可能 $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{|\Delta|\to 0} I(\Delta,\Xi)$。この時、$\lim\limits_{|\Delta|\to 0} I(\Delta,\Xi) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

6–2. 積分の基本性質.

- 区間に関する加法性：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- 線型性：$\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- 単調性：$[a,b]$ で $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

6–3. 不定積分. 定積分関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\displaystyle\int f(x)dx$ と書く。$\cdots$ **不定積分**

6–4. 微分積分学の基本定理. f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

即ち、**不定積分** = **原始関数**（微分すると f になる関数）。$\cdots$ 微分法と積分法との邂逅 !!
又、F を f の原始関数（の一つ）とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \left(= \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く} \right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
足立恒雄「類体論へ至る道」より