7. 広義積分（変格積分）

7–1. **広義積分（変格積分）**. 積分区間又は非積分関数が有界でない場合。
下記の右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f：区間 $[a,b)$（resp. $(a,b]$） の上端 b（resp. 下端 a）の近くで有界でない場合
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
- f：区間 $[a,+\infty)$（resp. $(-\infty,b]$）で定義されている場合
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^b f(x)dx$$
- f：区間 $[a,b]$ の内点 c の近くで有界でない場合
$\longrightarrow$ 積分区間を $[a,c),(c,b]$ に分けて、それぞれ考えよ。
- f：積分区間の両端 a,b で広義積分の場合（a,b の近くで有界でないか、$a,b=\pm\infty$）
$\longrightarrow$ 適当な点 c で積分区間を $(a,c],[c,b)$ に分けて、それぞれ考えよ。
- 典型的な例：
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases}\alpha>1 \Rightarrow \text{収束}\\ \alpha\le 1\Rightarrow \text{発散},\end{cases} \qquad \int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases}\alpha<1 \Rightarrow \text{収束}\\ \alpha\ge 1\Rightarrow \text{発散}\end{cases}$$
- 比較判定法 (簡単な場合)：
$$\star\ \exists\varepsilon>0 : f(x)=O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)(x\to+\infty)\Rightarrow\int_1^{+\infty}f(x)dx\ \text{：収束}$$
$$\star\ \exists\varepsilon>0 : f(x)=O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right)(x\to+0)\Rightarrow\int_0^{1}f(x)dx\ \text{：収束}$$

7–2. Γ **関数・**B **関数.**

- $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}x^s\frac{dx}{x}$ ：Γ **関数** (広義積分は $s>0$ で収束)
- $\mathrm{B}(s,t)=\displaystyle\int_0^1 x^s(1-x)^t\frac{dx}{x(1-x)}$ ：B **関数** (広義積分は $s>0,t>0$ で収束)
- $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad \Gamma(n+1)=n!,\quad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s},\quad \mathrm{B}(s,t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

7–3. **練習問題.**

(1) $0<\alpha<1<\beta$ かつ $\alpha\beta=1$ とする。広義積分
$$I=\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx, \qquad J=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\beta}dx$$
をそれぞれ求めた上で比較し、それをグラフの下の面積という観点から解釈せよ。

(2) a,b を正の実数として、広義積分
$$I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx, \qquad J=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx$$
を、色々な方法で求めてみよう。

(a) 部分積分して I,J の間の関係式を 2 つ求め、それらを連立して I,J を求めよ。
(2 回部分積分してそれぞれが満たす関係式を得る方法と、実質的には同じ。)

(b) 形式的に $K=I+iJ$ とおくと、Euler の公式により、
$$K=\int_0^{+\infty}e^{(-a+bi)x}dx$$
となる。複素数 $\alpha=-a+bi\in\boldsymbol{C}$ に対しても、$(e^{\alpha x})'=\alpha e^{\alpha x}$ となると考えて、広義積分 K の値を求め、その実部・虚部として I,J を得よ。（この考えは、複素数の指数関数や複素数値関数の微分積分をしかるべく定式化することにより正当化される。詳しくは複素関数論で。）

8. 積分の計算法

8–1. 有理関数の積分. 部分分数に分解し、次の場合に帰着。（但し $c>0$）

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$ ：$n=1$ なら $\log|x-a|$, $n\geq 2$ なら $\displaystyle -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $\sqrt{c}\,t=x+b, \sqrt{c}\,dt=dx$ で $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ に帰着
  $\longrightarrow n=1$ なら $\arctan t$, $n\geq 2$ なら部分積分で $n-1$ の場合に帰着
- $\displaystyle\int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $t=(x+b)^2+c, dt=2(x+b)dx$ で $\displaystyle\int \frac{dt}{t^n}$ に帰着

8–2. 冪根（平方根など）を含む積分. 不定積分（原始関数）が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分
  $\longrightarrow$ 変数変換 $y^n=ax+b, ny^{n-1}dy=adx$ で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$（$\sqrt{1\text{次式}}$ 2 種類）の有理式の積分
  $\longrightarrow$ 変数変換 $y^2=ax+b, 2ydy=adx$ で $\sqrt{2\text{次式}}$ の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分
  $\longrightarrow y^2=ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3\text{次以上の多項式}}$ の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。
  （$\sqrt{3\text{次式又は}4\text{次式}}$ の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。）

8–3. 三角関数の有理関数の積分. $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

8–4. 練習問題.

(1) 次の有理式を部分分数分解せよ。

(a) $\dfrac{1}{x(x-1)}$　(b) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$　(c) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$

(2) 有理関数 $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-30}{x^2(x^2-2x+10)}$ の不定積分を計算したい。

(a) $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c(2x-2)+d}{x^2-2x+10}$ を満たす定数 a,b,c,d を求めよ。

(b) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

(3) 不定積分

$$I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}\qquad (n=1,2,\dots)$$

を考える。

(a) $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}=(x)'\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ と見て部分積分することにより、I_n と I_{n+1} との間の関係式を求めよ。

(b) I_2, I_3 を求めよ。

(4) 次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。

(a) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+9}\,dx$　(b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x-2x^2}}{2+x}\,dx$　(c) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,dx$

(5) 次の不定積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+1}\,dx$　(b) $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$　(c) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x^2}\,dx$