## 8. 積分の計算法

**8–1. 有理関数の積分.** 部分分数に分解し、次の場合に帰着。(但し $c>0$)

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$ ：$n=1$ なら $\log|x-a|$, $n\geq 2$ なら $\displaystyle -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $\sqrt{c}\,t=x+b, \sqrt{c}\,dt=dx$ で $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ に帰着
  $\longrightarrow n=1$ なら $\arctan t$, $n\geq 2$ なら部分積分で $n-1$ の場合に帰着
- $\displaystyle\int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $t=(x+b)^2+c, dt=2(x+b)dx$ で $\displaystyle\int \frac{dt}{t^n}$ に帰着

**8–2. 冪根（平方根など）を含む積分.** 不定積分（原始関数）が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分
  $\longrightarrow$ 変数変換 $y^n=ax+b, ny^{n-1}dy=adx$ で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$（$\sqrt{1\text{次式}}$ 2 種類）の有理式の積分
  $\longrightarrow$ 変数変換 $y^2=ax+b, 2ydy=adx$ で $\sqrt{2\text{次式}}$ の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分
  $\longrightarrow y^2=ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3\text{次以上の多項式}}$ の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。
  （$\sqrt{3\text{次式又は}4\text{次式}}$ の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。）

**8–3. 三角関数の有理関数の積分.** $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

**8–4. 練習問題.**

(1) 次の有理式を部分分数分解せよ。

(a) $\dfrac{1}{x(x-1)}$ (b) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$ (c) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$

(2) 有理関数 $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-30}{x^2(x^2-2x+10)}$ の不定積分を計算したい。

(a) $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c(2x-2)+d}{x^2-2x+10}$ を満たす定数 $a,b,c,d$ を求めよ。

(b) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

(3) 不定積分

$$I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}\qquad (n=1,2,\dots)$$

を考える。

(a) $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}=(x)'\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ と見て部分積分することにより、$I_n$ と $I_{n+1}$ との間の関係式を求めよ。

(b) $I_2, I_3$ を求めよ。

(4) 次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。

(a) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+9}\,dx$ (b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x-2x^2}}{2+x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,dx$

(5) 次の不定積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x^2}\,dx$