

### 1. 一般的な諸注意

- 学生証または「臨時学生証(定期試験用)」を机上に提示すること。
- 入室は試験開始後20分まで認める。退室は試験開始後30分を過ぎたら認める。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷(白色かそれに近いもので無地)・時計(電卓機能等のないもの)のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。電卓・計算機の使用不可。
- 携帯電話等は電源を切って鞆の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始まで問題用紙を裏返しておくこと。
- 試験開始後、まづ初めに学生番号・名前を答案用紙の両面に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案用紙を提出すること。
- 問題用紙・公式集は持ち帰ること。

### 2. 問題・解答について

- 解答は答案用紙に記述すること。問題番号ごとに指定された場所に書くこと。但し、
  - ★ 問1は直観問題であり、 $\times$ のみを解答欄に記入すればよい。
  - ★ 問2は適切な数値・数式・ $\times$ を解答欄に記入すればよい。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。採点者が読めるよう、文字・記号を丁寧に書くこと。数式も文であり、答案は文章である。数式のみで十分な場合もあるので、殊更に丁寧過ぎる必要はないが、数式の散漫な羅列ではいけない。必要に応じて、「とする」「となればよい」「したがって」などの言葉を適切に用いて、意図・論理の伝わる答案を心掛けること。
- 公式集の裏面は、下書き・計算用紙として利用してよい(提出不要)。解答用紙には計算の細部を整理して清書したものを記述すればよいが、(積分計算であれば変数変換・部分積分など)どのような筋道を辿ったかが分かるように書くこと。最終結果が合っているだけでなく、ポイントとなる箇所が書かれていて、答案として著しい飛躍がないよう、心掛けること。(どこがポイントであるか、についても適切に判断せよ。)
- 上述の点を含めて、答案の記述は言わば筆記プレゼンテーションであるから、その良し悪しも評価対象である。

### 3. 秋学期の数学関係科目について

秋学期には理工共通科目 II 群の選択科目として次の科目が開講される。

- 「数学 AII (線型空間論)」
  - ★ 公理に基づいた線型空間の理論 (線型空間・線型写像)
  - ★ 線型空間の例 (数ベクトル空間・数列空間・関数空間など) と応用
- 「数学 BII (多変数微積)」
  - ★ 多変数関数の微分法 (全微分・偏微分・極値問題)
  - ★ 多変数関数の積分法 (重積分・面積・体積)
  - ★ ベクトル値関数の微分積分 (所謂「ベクトル解析」)
- 「微分方程式の基礎」
  - ★ 典型的な微分方程式の理論と解法
  - ★ 重要な例の一つとして連立線型微分方程式と固有値問題
- 「数学演習 II」
  - ★ 主に「数学 BII (多変数微積)」に関連する演習

多変数関数・ベクトル値関数・連立方程式などの取扱いに於いては、線型代数 (行列・ベクトル) の言葉を用いると、一変数の場合と同様な記述が出来て便利な場合が多い。各科目の内容を互いに関連付けた理解が必要であるので、並行して履修することを奨める。春学期の「数学 AI (線形代数)」「数学 BI (微分積分)」「数学演習 I」の復習も、夏休み中にしておこう。

尚、理工学部生も履修できる全学共通科目として次の科目も開講される。

- 「現代数学 B」
  - ★ 自然数から実数に至る数体系の構成
  - ★ 実数の基礎付け (実数の連続性)・ $\varepsilon$ - $\delta$  論法

2017年度春期 数学BI(微分積分)(SCT117I0) 期末試験(担当:角皆)

問1. 次の広義積分は収束するか。収束するなら、しないなら×を、解答欄に記せ。

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{x^{2017} + 724}{e^x} dx \quad (2) \int_1^{\infty} \frac{1}{x + (\log x)^{2017}} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^3} dx$$

問2. 閉区間  $I = [0, 3]$  上の関数  $f$  を次で定める:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 1) \\ 5 & (x = 1) \\ 0 & (1 < x \leq 3). \end{cases}$$

$0 < \varepsilon < 1$  なる実数  $\varepsilon$  に対し、 $x_1 = 1 - \varepsilon$ ,  $x_2 = 1 + \varepsilon$  とし、区間  $I$  の分割

$$\Delta_\varepsilon : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 3$$

を考える。分割された各小区間  $I_j = [x_{j-1}, x_j] = \{x \mid x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$  での関数値  $f(x)$  の下限・上限をそれぞれ  $m_j = \inf_{x \in I_j} f(x)$ ,  $M_j = \sup_{x \in I_j} f(x)$  とし、

$$s_{\Delta_\varepsilon} = \sum_{j=1}^3 m_j(x_j - x_{j-1}), \quad S_{\Delta_\varepsilon} = \sum_{j=1}^3 M_j(x_j - x_{j-1})$$

とする。

- (1) 各小区間  $I_j$  について  $m_j, M_j$  の値を記せ。
- (2) この分割  $\Delta_\varepsilon$  について、 $s_{\Delta_\varepsilon}, S_{\Delta_\varepsilon}$  の値を記せ。
- (3)  $\sup_{0 < \varepsilon < 1} s_{\Delta_\varepsilon}$  及び  $\inf_{0 < \varepsilon < 1} S_{\Delta_\varepsilon}$  の値を記せ。
- (4) 関数  $f$  は区間  $I$  で積分可能であるか。積分可能なら、積分可能でないなら×を、解答欄に記せ。

問3. 次の定積分  $I$  の値を求めよ。

$$(1) I = \int_0^{15} \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x+1}} dx \quad (2) I = \int_0^1 \arctan x dx$$

問4. 有理関数  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 30}{x^2(x^2 - 2x + 10)}$  の不定積分を計算したい。

- (1)  $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c(2x-2)+d}{x^2-2x+10}$  を満たす定数  $a, b, c, d$  を求めよ。
- (2) それぞれの項の不定積分を計算して、 $\int f(x) dx$  を求めよ。

問5.  $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  の逆関数  $\operatorname{arctanh} x$  の Taylor 展開を次の手順で求めよ。

- (1)  $x = \tanh y$  の満たす微分方程式 ( $\frac{dx}{dy}$  と  $x$  とが満たす関係式) を求める。
- (2)  $y = \operatorname{arctanh} x$  を積分で表す。
- (3) 被積分関数を Taylor 展開して項別積分する。

問6.  $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) とおく。

- (1)  $I_0, I_1$  を求めよ。
- (2)  $I_n$  の漸化式 ( $I_n$  と  $I_{n-1}$  との関係式) を求めよ。(ヒント: 部分積分)
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  を求めよ。

2017年度春期 数学BI(微分積分)(SCT117I0) 期末試験(担当:角皆)

以下の問題は力試的な問題であり、採点基準も厳しい。左ページの問題の回答に不安がある場合には、そちらの解答に集中する方がよしい。適切に選んで解答すること。

問7. 関数  $f$  が  $x = a$  で連続であることの定義は、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  であること(即ち、任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、或る正の数  $\delta$  が存在して、 $|k| < \delta \Rightarrow |f(a+k) - f(a)| < \varepsilon$  となること)である。

2つの関数  $f_1, f_2$  が共に  $x = a$  で連続であるとき、 $g(x) := f_1(x) + f_2(x)$  で定義される関数  $g$  (関数  $f_1, f_2$  の和といい、通常  $f_1 + f_2$  と書く) も  $x = a$  で連続であることを、 $\varepsilon$ - $\delta$  流で証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

$\forall \varepsilon > 0$  を取る。  
 $f_1$  は  $x = a$  で連続であるから、  
 $\exists \delta_1 > 0 : |h| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(a+h) - f_1(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$   
 $f_2$  は  $x = a$  で連続であるから、同様に、  

$f_2$  と同様

  
 $\delta :=$  ? と取ると、  
 $|h| < \delta$  に対し、  

$\dots$   
 $|g(a+h) - g(a)| < \varepsilon$  を示す  
 $\dots$

  
従って、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$  となり、 $g$  は  $x = a$  で連続。

(可能であれば、 $h(x) := f_1(x)f_2(x)$  で定義される関数  $h$  について、 $h$  が  $x = a$  で連続であることを示しても良い。)

問8. 閉区間  $I = [0, 1]$  上の関数  $f$  を次で定める：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{n} \text{ (} n : \text{正整数) のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

$f$  の  $I$  における下積分は 0 であるが、実は上積分も 0 であって、(不連続点が無限個あるにも関わらず)  $f$  は  $I$  で積分可能である。このことを示せ。(ヒント：任意に与えられた  $\varepsilon > 0$  に対して、“上からの見積もり”  $S_{\Delta_\varepsilon}$  が  $\varepsilon$  以下となるような分割  $\Delta_\varepsilon$  を構成せよ。)

以上

## TAYLOR 展開の例

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

## TAYLOR 展開の剰余項

$f$  が  $N$  階微分可能の時、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!}x^{N-1} + R_N(x)$$

$$0 < \exists \theta < 1 : R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N$$

## 積分の公式

$$\begin{array}{ll}
 \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1) & \int \sec^2 x dx = \tan x \\
 \int \frac{dx}{x} = \log |x| & \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x \\
 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases} \quad (\text{注}) \\
 \int e^x dx = e^x & \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \\
 \int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} & \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \\
 \int \log x dx = x \log x - x & \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \\
 \int \sin x dx = -\cos x & \int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})) \\
 \int \cos x dx = \sin x & \int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2-1} - \log|x + \sqrt{x^2-1}|) \\
 \int \tan x dx = -\log |\cos x| & \int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \\
 \int \cot x dx = \log |\sin x| & \int \arctan x dx = ? \quad (\text{問 3(2) 参照}) \\
 \int \sinh x dx = \cosh x & \int \operatorname{arcsinh} x dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{1+x^2} \\
 \int \cosh x dx = \sinh x & \int \operatorname{arctanh} x dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2} \log(1-x^2) \\
 \int \tanh x dx = \log \cosh x & \\
 \int \operatorname{coth} x dx = \log |\sinh x| &
 \end{array}$$

(注)

- $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$  ではあるが、不定積分では定数の差は気にしないので、いづれでもよい。
- $\arcsin x, \arctan x$  等は所謂主値を取る： $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$