前回の復習から

- この部分は写すな
- 自分のノートを見直せ
- 必要があれば補足事項を書き込め

本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式の数学」とは？

収束・発散・極限などなど、それも

- **はさみ打ちの原理**
- **区分求積法**
- **誤差の評価 (estimate)**

など

問 1^{+}：

縦が大体 3cm**、横が大体** 5cm **の長方形の紙がある。**

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\mathrm{cm}^2$$

である。さて、正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対し、**

面積の誤差が ε cm^2 **以内**

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

真の縦の長さを $(3+h)$ cm、
真の横の長さを $(5+k)$ cm、
誤差が δ cm **以内とすると、**

$$0 \le |h| \le \delta, \qquad 0 \le |k| \le \delta.$$

$$\begin{aligned} |(3+h)(5+k)-15| &= |5h+3k+hk| \\ &\le 5|h|+3|k|+|h||k| \\ &\le 8\delta+\delta^2. \end{aligned}$$

従って、$8\delta+\delta^2 \le \varepsilon$ **となれば良い。**

ここで、（例えば） $\delta \leq 1$ **とする。すると、**

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \delta = 9\delta$$

であるから、 $9\delta \leq \varepsilon$ **となれば良い。これより**

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{9}$$

となる。これと、さっき仮定した $\delta \leq 1$ **とを共に満たせば良いので、**

$$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{9}\}$$

に取れる。従って、縦横の長さの誤差は

$$\min\{1, \frac{\varepsilon}{9}\} \text{ cm 以内}$$

であれば良い。

任意の（どんなに小さい）正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても、

$$|h| \le \delta, |k| \le \delta \Longrightarrow |(3+h)(5+k) - 15| \le \varepsilon$$

となる正の実数値 $\delta > 0$ を見付けることが可能であった

（ε が小さければ δ も小さくしなければいけないけれども）

これはどういうことかと言うと、

「h, k が充分 0 に近ければ、

$(3+h)(5+k)$ は充分 $3\cdot 5 = 15$ に近い」

ということを言っている

これが

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} (3+h)(5+k) = 15$$

或は

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 5}} xy = 15$$

の実質的な意味内容なのであった !!（以上復習）

さて、（詳しく見るために）少し問題を単純にして、

問 2：

一辺が大体 3cm の正方形
（従って面積は大体 9cm^2）で、

正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

面積の誤差を $\varepsilon\ \text{cm}^2$ 未満にしたければ、

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

更に問題を単純にして、

一辺の長さは縦横ともに $(3+h)$ cm **とし、**

誤差は δ cm **未満 （つまり** $|h| < \delta$**） としよう。**

$$\begin{aligned} |(3+h)^2 - 9| &= |6h + h^2| \\ &\le 6|h| + |h|^2 \\ &< 6\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

この後は前回のように $\cdots\cdots$

問 2^+ **：**

関数 $f(x) = x^2$ **において、**

x **を** 3 **に近付けると** $f(x)$ **は** 9 **に近付くようだが、**

その誤差について、正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対し、**

$$|f(x) - 9| < \varepsilon$$

となるためには、

x **をどの程度** 3 **に近付ければ良いか？**

($|x-3| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 9| < \varepsilon$ **となるには、**
δ **の値をどれくらいにすれば良いか？)**

($x = 3 + h$ **と置くと計算し易い)**

これは何をやっているかと言うと、

「h が充分 0 に近ければ、
$(3+h)^2$ は充分 9 に近い」

ということを言っている

「x が充分 3 に近ければ、
x^2 は充分 9 に近い」

と言っても良い

これが

$$\lim_{h \to 0} (3 + h)^2 = 9$$

或は

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

の実質的な意味内容なのであった !!

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
$$0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x-3| < \delta \Longrightarrow |x^2-9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

ε-δ 流の関数の極限の定義

関数 f **に対し、**

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = b\right)$$

ということを、次で定義する：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε-δ 流の関数の連続の定義

関数 f **が** $x = a$ **で連続であるとは、**

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

問 2^{++}：

関数 $f(x) = x^2$ について、

f が $x = 3$ で連続であることを（ε-δ 流で）示せ。

すなわち、

任意の正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

或る正の実数 $\delta > 0$ が存在して、

（任意の実数 x に対し、）

$$|x - 3| < \delta \Longrightarrow |x^2 - 3^2| < \varepsilon$$

となること（$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$）を示せ。

（$x = 3 + h$ と置くと計算し易い）

演習問題 1：

(1) 関数 $f(x) = x^2$ について、f が $x = -4$ で連続であることを、
  (a) （ε-δ 流に）論理記号を交えた数式で記述せよ。
  (b) 証明せよ。

(2) 関数 $f(x) = x^3$ について、任意の実数 a に対し、f が $x = a$ で連続であることを、
  (a) （ε-δ 流に）論理記号を交えた数式で記述せよ。
  (b) 証明せよ。

以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう

極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限	$\longrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longrightarrow$	**離散量** **(digital)**

極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限	$\longleftrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longleftrightarrow$	**離散量** **(digital)**

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

（冪級数・整級数）

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

（冪級数・整級数）

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

（冪級数・整級数）

一般に、関数 f について、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **？**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

一般に、関数 f について、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **？**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

一般に、関数 f について、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **？**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

従って、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

と表せるとすれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$