

## 前回の復習から

- この部分は写すな
- 自分のノートを見直せ
- 必要があれば補足事項を書き込め

## 本講義の概要

- 不等式による評価
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

## 「不等式の数学」とは？

収束・発散・極限などなど、それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (**estimate**)

など

問 1+ :

縦が大体 3cm、横が大体 5cm の長方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、正の実数値  $\varepsilon > 0$  に対し、

面積の誤差が  $\varepsilon \text{ cm}^2$  以内

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

真の縦の長さを  $(3 + h)$  cm、  
真の横の長さを  $(5 + k)$  cm、  
誤差が  $\delta$  cm 以内とすると、

$$0 \leq |h| \leq \delta, \quad 0 \leq |k| \leq \delta.$$

$$\begin{aligned} |(3 + h)(5 + k) - 15| &= |5h + 3k + hk| \\ &\leq 5|h| + 3|k| + |h||k| \\ &\leq 8\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

従って、 $8\delta + \delta^2 \leq \varepsilon$  となれば良い。

ここで、(例えば)  $\delta \leq 1$  とする。すると、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \delta = 9\delta$$

であるから、 $9\delta \leq \varepsilon$  となれば良い。これより

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{9}$$

となる。これと、さっき仮定した  $\delta \leq 1$  とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\}$$

に取れる。従って、縦横の長さの誤差は

$$\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\} \text{ cm 以内}$$

であれば良い。

任意の (どんなに小さい)

正の実数値  $\varepsilon > 0$  に対しても、

$$|h| \leq \delta, |k| \leq \delta \implies |(3+h)(5+k) - 15| \leq \varepsilon$$

となる正の実数値  $\delta > 0$  を見付けることが  
可能であった

( $\varepsilon$  が小さければ  $\delta$  も小さくしなければ  
いけないけれども)

これはどういうことかと言うと、

「 $h, k$  が充分  $0$  に近ければ、

$(3 + h)(5 + k)$  は充分  $3 \cdot 5 = 15$  に近い」

ということを言っている

これが

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (3 + h)(5 + k) = 15$$

或は

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 5}} xy = 15$$

の実質的な意味内容なのであった!!(以上復習)



さて、(詳しく見るために)少し問題を単純にして、

問 2 :

一辺が大体  $3\text{cm}$  の正方形  
(従って面積は大体  $9\text{cm}^2$ ) で、

正の実数値  $\varepsilon > 0$  に対し、

面積の誤差を  $\varepsilon \text{ cm}^2$  未満にしたければ、

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

更に問題を単純にして、

一辺の長さは縦横ともに  $(3 + h)$  cm とし、

誤差は  $\delta$  cm 未満（つまり  $|h| < \delta$ ）としよう。

$$\begin{aligned} |(3 + h)^2 - 9| &= |6h + h^2| \\ &\leq 6|h| + |h|^2 \\ &< 6\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

この後は前回のように ……

問 2<sup>+</sup> :

関数  $f(x) = x^2$  において、

$x$  を 3 に近付けると  $f(x)$  は 9 に近づくようだが、

その誤差について、正の実数値  $\varepsilon > 0$  に対し、

$$|f(x) - 9| < \varepsilon$$

となるためには、

$x$  をどの程度 3 に近付ければ良いか？

(  $|x - 3| < \delta \implies |f(x) - 9| < \varepsilon$  となるには、  
 $\delta$  の値をどれくらいにすれば良いか？ )

(  $x = 3 + h$  と置くと計算し易い )

これは何をやっているかと言うと、

「 $h$  が充分  $0$  に近ければ、  
 $(3+h)^2$  は充分  $9$  に近い」

ということを行っている

「 $x$  が充分  $3$  に近ければ、  
 $x^2$  は充分  $9$  に近い」

と言っても良い

これが

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3 + h)^2 = 9$$

或は

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

の実質的な意味内容なのであった !!

どんな（小さな）正の実数  $\varepsilon$  に対しても、  
或る（都合の良い）正の実数  $\delta$  が存在して、  
$$0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \\ 0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

この流儀で  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$  を定式化（定義）すると  
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

## $\varepsilon$ - $\delta$ 流の関数の極限の定義

関数  $f$  に対し、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$
$$\left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right)$$

ということを、次で**定義**する：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

## $\varepsilon$ - $\delta$ 流の関数の連続の定義

関数  $f$  が  $x = a$  で連続であるとは、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である} \\ \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$



問 2<sup>++</sup> :

関数  $f(x) = x^2$  について、

$f$  が  $x = 3$  で連続であることを ( $\varepsilon$ - $\delta$  流で) 示せ。

すなわち、

任意の正の実数値  $\varepsilon > 0$  に対し、

或る正の実数  $\delta > 0$  が存在して、

(任意の実数  $x$  に対し、)

$$|x - 3| < \delta \implies |x^2 - 3^2| < \varepsilon$$

となること ( $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ ) を示せ。

( $x = 3 + h$  と置くと計算し易い)

## 演習問題 1 :

- (1) 関数  $f(x) = x^2$  について、 $f$  が  $x = -4$  で連続であることを、
- (a) ( $\varepsilon$ - $\delta$  流に) 論理記号を交えた数式で記述せよ。
  - (b) 証明せよ。
- (2) 関数  $f(x) = x^3$  について、任意の実数  $a$  に対し、 $f$  が  $x = a$  で連続であることを、
- (a) ( $\varepsilon$ - $\delta$  流に) 論理記号を交えた数式で記述せよ。
  - (b) 証明せよ。

以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう

# 極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限  $\longleftrightarrow$  有限

連続量  
(analog)  $\longleftrightarrow$  離散量  
(digital)

## 等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) \end{aligned}$$



関数を「多項式の極限」として表すこと  
( 冪級数・整級数 )

一般に、関数  $f$  について、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう … Taylor 展開

→ 係数  $a_n = ?$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

従って、

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

と表せるとすれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$