ε-δ 流の関数の極限の定義

関数 f に対し、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = b\right)$$

ということを、次で定義する：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x :$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε-δ 流の関数の連続の定義

関数 f **が** $x = a$ **で連続であるとは、**

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

この定義の下で、

「関数 $f(x) = x^2$ が

（全ての実数 a に対し $x = a$ で）

連続であること」

を証明してみよう

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

（以下、板書で）

ε-δ 流の関数の極限の定義

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$
$$\overset{\leftarrow}{\iff} (\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x :$$
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

この定義の下で、例えば次のことが証明出来る：

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to a} f(x) = b, \lim_{x \to a} g(x) = c \\ &\qquad \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c \\ \displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = bc \end{cases} \end{aligned}}$$

（以下、演習の時間に）

極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限	$\longrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longrightarrow$	**離散量** **(digital)**

極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限	$\longleftrightarrow$	**有限**
連続量 **(analog)**	$\longleftrightarrow$	**離散量** **(digital)**

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right)$$

$$\Downarrow$$

関数を「多項式の極限」として表すこと

（幂級数・整級数）

一般に、関数 f について、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **?**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

一般に、関数 f について、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **?**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

一般に、関数 f について、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と表すことを考えよう $\cdots$ **Taylor 展開**

$\longrightarrow$ **係数** $a_n =$ **？**

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

従って、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

<u>と表せるとすれば、</u>

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$ **：f の 形式的 Taylor 展開**

（形式的）Taylor 展開を計算してみよう !!

直接判る例：

- **多項式関数：そのまま**
  （だけど面白い例もある）
- **高階微分 $f^{(n)}(x)$ が良く判る場合：**
  $\sin x$, $\cos x$, e^x **など**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$ **：f の 形式的 Taylor 展開**

（形式的）Taylor 展開を計算してみよう !!

直接判る例：

- **多項式関数：そのまま**
  （だけど面白い例もある）

- **高階微分 $f^{(n)}(x)$ が良く判る場合：**
  $\sin x,\ \cos x,\ e^x$ **など**

二項定理

$$(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n$$
$$= 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2}x^2 + \cdots + x^N$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} = {}_N C_n$$

：**二項係数 (binomial coefficient)**

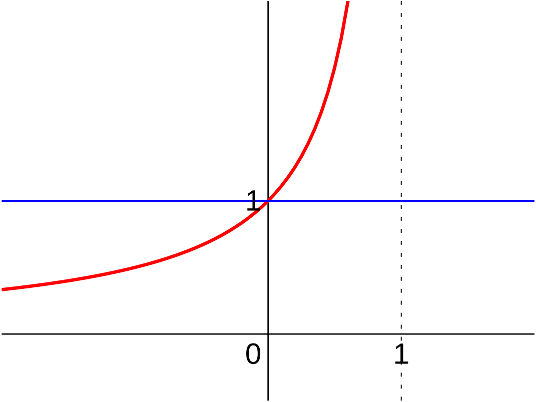
指数関数・三角関数

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \\
&= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots
\end{aligned}
$$

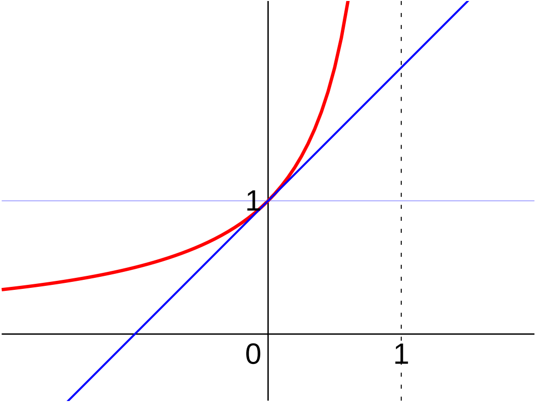
Taylor 展開の利点（何が良いか）

- $x = 0$ **の近くでの様子が分かる**
  - $\star$ **近似値の計算**
  - $\star$ $x \to 0$ **の極限の様子**
- **統一的・一意的表示**
- **良く分からない関数の色々な性質が分かる（かも）**

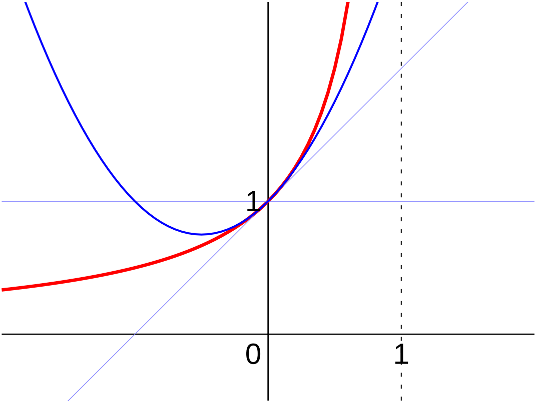
例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



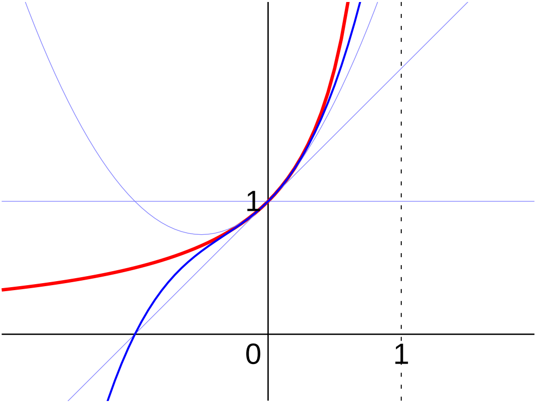
例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



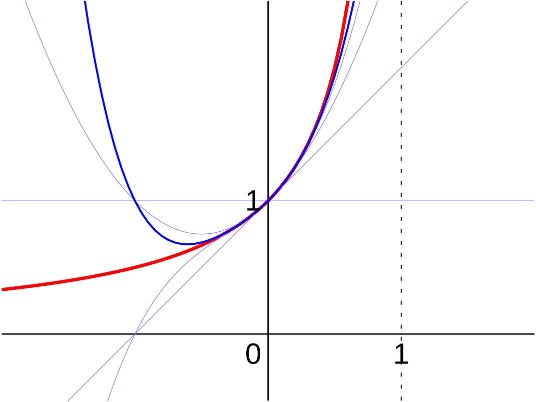
例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



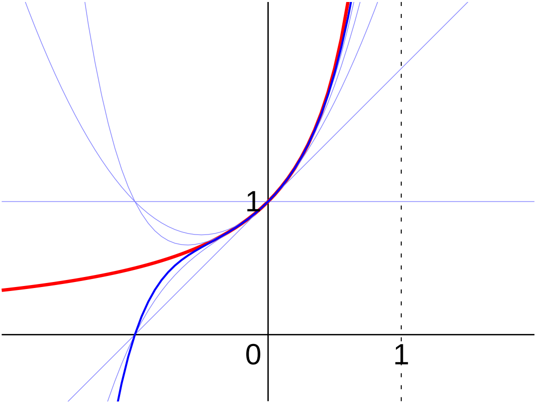
例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



例： $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$



Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\dfrac{1}{1-0.02} =$ **？** $\qquad e^{0.02} = \exp(0.02) =$ **？**

$\longrightarrow$ **どの辺で打切るとどの程度の誤差か？**

Taylor 展開を用いた $x \to 0$ の極限の計算

例： $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$ **？**

Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\dfrac{1}{1-0.02} =$ **？** $\qquad e^{0.02} = \exp(0.02) =$ **？**

$\longrightarrow$ **どの辺で打切るとどの程度の誤差か？**

Taylor 展開を用いた $x \to 0$ の極限の計算

例： $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$ **？**

Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\dfrac{1}{1-0.02} =$ **?** $\qquad e^{0.02} = \exp(0.02) =$ **?**

$\longrightarrow$ **どの辺で打切るとどの程度の誤差か？**

Taylor 展開を用いた $x \to 0$ の極限の計算

例： $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$ **?**

演習問題 2：

(1) $f(x) = \sin x$ **の Taylor 展開を求めよ。**

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$ **を求めよ。**

(b) $\sin 1$ **の近似値を小数第** 4 **位まで求めよ。**

（形式的）Taylor 展開の計算

高階微分 $f^{(n)}(x)$ の直接計算が難しい場合（または、$f^{(n)}(x)$ を直接計算しなくても）：

- **既知の公式から（等比級数の和など）**
- **既知の展開に代入**
- **既知の展開から四則演算で**
- **既知の展開から項別微積分で**

無限等比級数の和

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n$$
$$= 1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \cdots$$

収束 $\Longleftrightarrow |rx| < 1$

$$\Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{|r|}$$

（この例は念頭に置いておこう）

無限等比級数の和

$$\frac{1}{1-rx} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n$$
$$= 1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \cdots$$

$$\textbf{収束} \iff |rx| < 1$$
$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

（この例は念頭に置いておこう）

（形式的）Taylor 展開の計算

例題：

(1) $e^{-x^2} = \exp(-x^2)$

(2) $e^x \cos x$

(3) $\dfrac{1}{\cos x}$

(4) $-\log(1-x)$

（詳しくは演習の時間に）