今後の課題

- 無限級数の収束・発散の判定
- 特に、冪級数の場合
- “Taylor の定理”（誤差項の評価）
- 項別微積分

例：調和級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

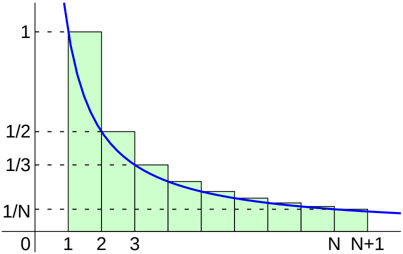
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

は 発散する

例：調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$
$$> \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1) \to +\infty \ (N \to \infty)$$



絶対収束・条件収束

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

が収束する一方、各項の絶対値を取った級数

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

は発散する。

このような収束の場合は非常に繊細だが、
各項の絶対値を取った級数も収束する場合には、
かなり扱い易い性質を持つ $\cdots$ **絶対収束**

絶対収束・条件収束

実数列 (a_n) **に対し、**

$$
\begin{aligned}
a_n^+ &:= \begin{cases} a_n = |a_n| & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases} \\
&= \max\{a_n, 0\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n^- &:= \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -a_n = |a_n| & (a_n < 0) \end{cases} \\
&= \max\{-a_n, 0\} = -\min\{0, a_n\}
\end{aligned}
$$

とおく

絶対収束・条件収束

例：

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots)$$

とすると

$$(a_n^+)_{n=1}^{\infty} = (1, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad 0, \quad \frac{1}{5}, \quad 0, \dots)$$

$$(a_n^-)_{n=1}^{\infty} = (0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{1}{6}, \dots)$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

絶対収束・条件収束

$$\sum |a_n| \text{：収束} \iff \sum a_n^+, \sum a_n^- \text{：共に収束}$$

$$\Longrightarrow \sum a_n \text{：収束}$$

しかし、一般には逆は成り立たない !!

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$：共に収束（即ち、$\sum |a_n|$：収束）の時、

「**絶対収束 (absolutely convergent)**」

という。この時は、

項の順番を入替えても同じ値に収束する。

絶対収束性の判定 ⋯ 正項級数の収束判定

絶対収束・条件収束

$\sum a_n^+, \sum a_n^-$：共に収束しない

（即ち、$\sum |a_n|$：収束しない）が、

$\sum a_n$ は収束する時、

「**条件収束** (**conditionally convergent**)」

という。この時は、項の順番を入替えると、

- 任意の実数値に収束させることも、
- $+\infty$ に発散させることも、
- $-\infty$ に発散させることも、
- どれでもないようにさせることも、

出来る

正項級数の収束判定

部分和：$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$$

正項級数 ($a_n > 0$**)** $\Longleftrightarrow$ **部分和** S_N **が単調増加**

$\longrightarrow$ **単調増加数列の収束判定へ**

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

単調増加数列の収束判定

「単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ が
正の無限大に発散する：$s_n \longrightarrow +\infty$」
とは？

“幾らでも大きくなる”

“どんな（大きな）値よりも大きくなる”

“どんな（大きな）値 M に対しても
どこかの番号 n で s_n の方が大きい”

$$\boxed{\forall M : \exists n : s_n > M}$$

数列の収束・発散

単調増加とは限らない

一般の数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **については、**

$n \longrightarrow \infty$ **のとき** $a_n \longrightarrow +\infty$
($(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **が正の無限大に発散)**

とは、

“どんな(大きな)値 M **に対しても**
どこかの番号 N **について**
それより先の番号 $n > N$ **で**
常に a_n **の方が大きい”**

$$\boxed{\forall M : \exists N : \forall n : n > N \Longrightarrow a_n > M}$$

数列の収束・発散

数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$$n \longrightarrow \infty \text{ のとき } a_n \longrightarrow a$$

（$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ **が** a **に収束）**

とは、

“どんな（小さな）正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対しても**
どこかの番号 N **について**
それより先の番号 $n > N$ **で**
常に誤差 $|a_n - a|$ **が** ε **未満”**

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n : n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon}$$

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ **が**

「 $\forall M : \exists n : s_n > M$ **」**

となったら $+\infty$ **に発散**

収束する為には

$$\boxed{\exists M : \forall n : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

M **：数列** $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ **の上界 (upper bound)**

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ **が**

「 $\forall M : \exists n : s_n > M$ **」**

となったら $+\infty$ **に発散**

収束する為には

$$\boxed{\exists M : \forall n : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

M **：数列** $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ **の上界 (upper bound)**

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ **が**

「 $\forall M : \exists n : s_n > M$ **」**

となったら $+\infty$ **に発散**

収束する為には

$$\boxed{\exists M : \forall n : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

M **：数列** $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ **の上界 (upper bound)**

上界が存在する数列を

上に有界 (bounded above) という

単調増加数列の収束判定

単調増加数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ **が収束する為には**

$$\boxed{\exists M : \forall n : s_n \leq M}$$

でなければならぬ

では、逆に、

$$\exists M : \forall n : s_n \leq M$$

なら、或る実数値に収束するのか？

定理

- **単調増加数列が収束 $\Longleftrightarrow$ 上に有界**
- **正項級数が収束 $\Longleftrightarrow$ 部分和が有界**

即ち、$\forall n : a_n \geq 0$ **の時、**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{：収束} \Longleftrightarrow \exists M : \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M$$

しかも、

- **極限値は部分和の最小上界（上限）**
- **部分和は "飛び飛びの和" も考えても同じ**
- **順番を入替えても同じ値に収束**

極限値は部分和の最小上界（上限）
(least upper bound, supremum)

$$
\begin{aligned}
M_0 &:= \min\left\{ M \,\middle|\, \forall N : \sum_{n=0}^{N} a_n \le M \right\} \\
&= \sup\left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \,\middle|\, N = 0, 1, 2, \ldots \right\}
\end{aligned}
$$

とするとき、

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = M_0.
$$

上限・下限について

例：半開区間 $I = [0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$

I **に最大値はないが、**
どう見ても 1 **が "最大値みたいな値" である**

上限・下限について

1 は最小の上界：

- **1 が上界である：** $\forall x \in I : x \leq 1$
- **1 より少しでも小さくしたら上界でない：**

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : x > 1 - \varepsilon$$

“どんな（小さな）正の数 ε についても
或る（うまい／まずい）$x \in I$ があって
x が $1 - \varepsilon$ を超える”

このことを、

1 が I の上限 (supremum) である

と言い、$\sup I = 1$ と書く

上限・下限について

一般に、
実数全体の集合 $\mathbb{R}$ **の部分集合** $S \subset \mathbb{R}$ **に対し、**
実数 $a \in \mathbb{R}$ **が次を満たす**
（即ち、a **が** S **の最小の上界である）とき、**
a **が** S **の上限であるといい、**$a = \sup S$ **と書く：**

- $\forall x \in S : x \leq a$
  （即ち、a **が** S **の上界（の一つ）である）**

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x > a - \varepsilon$
  （即ち、a **より少しでも小さくしたら**
  S **の上界でない）**

定理

- 単調増加数列が収束 $\Longleftrightarrow$ 上に有界
- 極限値は数列の最小上界（上限）

このことの "証明"（特に上限の存在）は、実は

実数とは何か？

に立ち戻らなければならない

本授業ではそこまでは立ち戻らず、
これを実数の基本性質として認めることとする

詳しく学びたい人は、秋学期の
「現代数学 B」（全学共通科目）
を受講されたい

収束・発散の判定法

さて、具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

$\longrightarrow$ **収束・発散が良く判っている級数と比較する**

（比較判定法）

収束・発散の判定法

さて、具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

$\longrightarrow$ 収束・発散が良く判っている級数と比較する（比較判定法）

比較判定法（良く判っている級数と比較）

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$\forall n : a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **：収束** $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ **：収束**
- $\sum a_n$ **：発散** $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ **：発散**

  - **途中からでも良い**
    （$\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可）**
  - **定数倍しても良い**
    （$\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq C b_n$ **でも可）**

比較判定法（良く判っている級数と比較）

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$\forall n : a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **：収束** $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ **：収束**
- $\sum a_n$ **：発散** $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ **：発散**

- **途中からでも良い**
  （$\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可）**
- **定数倍しても良い**
  （$\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq C b_n$ **でも可）**

比較判定法（良く判っている級数と比較）

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ **について、**

$\forall n : a_n \leq b_n$ **のとき**

- $\sum b_n$ **：収束** $\Longrightarrow \sum a_n$ **：収束**
- $\sum a_n$ **：発散** $\Longrightarrow \sum b_n$ **：発散**

  - **途中からでも良い**
    （$\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ **でも可）**
  - **定数倍しても良い**
    （$\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ **でも可）**

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**"隣との比"**$| < 1$ **くらいなら収束**

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

$\cdots$ **等比級数** $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

- $|r| < 1$ **のとき収束し、その和は** $\dfrac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ **のとき発散**

$\longrightarrow$ **大体** $|$**"隣との比"**$| < 1$ **くらいなら収束**

等比級数との比較

$a_n = r^n$ **から "隣との比"** r **を取り出すには？**

- **漸化式:** $a_{n+1} = ra_n \to \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- **一般項:** $a_n = r^n \to \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ **一般の数列** (a_n) **に対しても、**

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ **や** $\sqrt[n]{a_n}$ **が大体** r **くらいなら**

振舞は同様だろう

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から "隣との比" r を取り出すには？

- 漸化式: $a_{n+1} = ra_n \rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項: $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

$\longrightarrow$ 一般の数列 (a_n) に対しても、
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら
振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法（比テスト）

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r\right) \Longrightarrow \sum a_n \text{：収束}}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad \text{（収束）}$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**

Cauchy の判定法（n 乗根テスト）

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **について、**

$$\boxed{(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \Longrightarrow \sum a_n \textbf{：収束}}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad \textbf{（収束）}$$

のとき、

- $r < 1 \Longrightarrow$ **収束**
- $r > 1 \Longrightarrow$ **発散**