

中間試験のお知らせ

6月12日(月) 13:30 ~ 15:00

教室未定

- Taylor 展開を巡る諸々
(前の週(6/5)の講義内容まで)
- 学生証必携

詳細は追って

演習問題 2 :

(1) $f(x) = \sin x$ の Taylor 展開を求めよ。

(2) これを利用して、

(a) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ を求めよ。

(b) $\sin 1$ の近似値を小数第 4 位まで求めよ。

演習問題2の答案へのコメント

- \sum で無理に書く必要はない（が書くのも良い）
 - ★ $n = 0, 1$ 辺りで確認を
 - ★ 感覚の行き来が重要
- $=$ は「両辺が等しい」ことを表す記号
 - ★ “式変形” の記号ではない!!
 - ★ 必要な $+\dots$ を忘れない
 - ★ 極限操作 “ \rightarrow ” との区別をせよ
- $\sin 1$ の近似値
 - ★ どこまでとれば大丈夫？
 - ★ 必要・意味のある桁と
不要・意味のない桁との見極めが重要
- 自分で手を動かして計算せよ（数学は実技科目）

収束・発散の判定法

具体的な数列について、

収束・発散の判定をするには、

どうしたらよいだろうか？

→ 収束・発散が良く判っている級数と比較する
(比較判定法)

比較判定法 (良く判っている級数と比較)

正項級数 $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

$\forall n : a_n \leq b_n$ のとき

- $\sum b_n : \text{収束} \implies \sum a_n : \text{収束}$
- $\sum a_n : \text{発散} \implies \sum b_n : \text{発散}$

- 途中からでも良い

($\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ でも可)

- 定数倍しても良い

($\exists C > 0 : \forall n : a_n \leq Cb_n$ でも可)

合わせて、

$\exists C > 0 : \exists N : \forall n \geq N : a_n \leq Cb_n$ でも可

比較判定法（良く判っている級数と比較）

典型的な「良く判っている級数」

… 等比級数 $a_n = r^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- $|r| < 1$ のとき収束し、その和は $\frac{1}{1-r}$
- $|r| \geq 1$ のとき発散

→ 大体 |“隣との比”| < 1 くらいなら収束

等比級数との比較

$a_n = r^n$ から“隣との比” r を取り出すには？

- 漸化式： $a_{n+1} = r a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$
- 一般項： $a_n = r^n \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = r$

→ 一般の数列 (a_n) に対しても、

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ や $\sqrt[n]{a_n}$ が大体 r くらいなら

振舞は同様だろう

d'Alembert の判定法 (比テスト)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$\left(\exists r < 1 : \forall n : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \right) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について、

$$(\exists r < 1 : \forall n : \sqrt[n]{a_n} \leq r) \implies \sum a_n : \text{収束}$$

特に、

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束})$$

のとき、

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

例題

次の級数が絶対収束するような x の範囲は？

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n2^n x^n$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

典型的な強さ比較

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

より一般に $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\frac{x^a}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

指数関数は多項式より遥かに強い!!

d'Alembert の判定法 (比テスト)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

Cauchy の判定法 (n 乗根テスト)

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \exists r \quad (\text{収束}) \text{ のとき、}$$

- $r < 1 \implies$ 収束
- $r > 1 \implies$ 発散

で、 $r = 1$ の時は判定不能 (両方有り得る)

特に、単に

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < 1$$

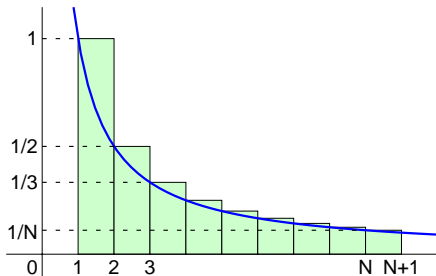
であっても、収束するとは限らない!!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \exists r < 1 \text{ または } \sqrt[n]{a_n} < \exists r < 1$$

との違いに注意 !!

例：調和級数

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > \int_1^{N+1} \frac{dx}{x}$$
$$= \log(N+1) \rightarrow +\infty \quad (N \rightarrow \infty)$$



実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→ $s > 1$ で s の関数を定めている

実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→ $s > 1$ で s の関数を定めている

実際、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{発散} \quad \text{だが、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{収束}$$

実は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} : \begin{cases} s \leq 1 \implies \text{発散} \\ s > 1 \implies \text{収束} \end{cases}$$

→ $s > 1$ で s の関数を定めている

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

(この範囲で s の関数を定めている)
… **Riemann のゼータ関数**

この $\zeta(s)$ の性質に関する重要な予想：

「Riemann 予想」

→ 素数分布などに関連

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad : s > 1 \text{ で絶対収束}$$

(この範囲で s の関数を定めている)
… **Riemann のゼータ関数**

この $\zeta(s)$ の性質に関する重要な予想：

「**Riemann 予想**」

→ 素数分布などに関連

Riemann のゼータ関数の特殊値 (お話)

Euler (18 世紀):

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

⋮

$$\zeta(2m) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m}$$

$(m = 1, 2, 3, \dots)$

Riemann のゼータ関数の特殊値 (お話)

- $\zeta(3)$: 有理数でない (Apéry, 1978)
- $\zeta(2m+1)$ 達の中に無理数が無限個
(Rivoal, 2000)
- $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$ の中の
少なくとも 1 つは無理数
(Rivoal, 2001)
- $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ の中の
少なくとも 1 つは無理数
(Zudilin, 2001)

→ これらの値 (特殊値) の数論的性質は
現在でも大きな研究テーマ

冪級数の収束判定

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が収束する x の範囲は？

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
 $\implies |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup \{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \}$
: 収束半径 (radius of convergence)

冪級数の収束判定

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ が収束する x の範囲は？

- $\sum c_n x^n$ が $x = x_0$ で収束
 $\implies |x| < |x_0|$ で絶対収束
- $r := \sup \{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \}$
: 収束半径 (**radius of convergence**)

収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$ 絶対収束
- $|x| > r \implies$ 発散
- 全ての実数 x に対し収束 ... $r = \infty$ (便宜上)
- $x = 0$ でしか収束しない ... $r = 0$

注: $|x| = r$ では、収束・発散ともにあり得る

収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$ 絶対収束
- $|x| > r \implies$ 発散

- 全ての実数 x に対し収束 ... $r = \infty$ (便宜上)
- $x = 0$ でしか収束しない ... $r = 0$

注: $|x| = r$ では、収束・発散ともにあり得る

収束半径

$$r := \sup \left\{ |x_0| \mid \sum c_n x^n \text{ が } x = x_0 \text{ で収束} \right\}$$

: 収束半径 (radius of convergence)

- $|x| < r \implies$ 絶対収束
- $|x| > r \implies$ 発散
- 全ての実数 x に対し収束 ... $r = \infty$ (便宜上)
- $x = 0$ でしか収束しない ... $r = 0$

注: $|x| = r$ では、収束・発散ともにあり得る