

本講義後半の主題は、

積分

である

## 高校で習った積分

- 逆微分としての「原始関数」  
 $f(x) = F'(x)$  となる  $F$  を求める
- 原始関数の区間両端での値の差としての  
「定積分」  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- 定積分は実は「面積」を表す

## 積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、  
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- 「積分」：面積を求める手法の探求  
(エジプト・ギリシャ：2000年以上前)
- 「微分」：物体の運動の数学的探求  
(Newton, Leibniz：17世紀)

それぞれ別のものとして発見されたものが  
実は密接に関連していた !!  
... 「**微分積分学の基本定理**」

## 積分法

- 統一的な求積法としての「定積分」
- 積分の上端を動かして、  
積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt : \text{「定積分関数」}$$

- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

## 積分の定義

仮定：

- 積分区間  $I = [a, b]$  : 有界閉区間
- 被積分関数  $f : I$  で 有界  
即ち、

$$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

## 「積分」の定義の方針

- 区間を分割せよ
- 各区間で上下から見積もれ
- それを足し上げよ
- 以上を全ての分割について考えよ
- 上下からの見積が一致するか？

## 積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  : 区間の分割

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$  : 各小区間 ( $i = 1, \dots, n$ )

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$  : 区間幅

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$  : 分割の最大幅

$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$

$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$

: 区間  $I_i$  に於ける  $f$  の下限・上限

## 積分の定義

$$s_{\Delta} := \sum_{i=1}^n m_i |I_i|$$

$$S_{\Delta} := \sum_{i=1}^n M_i |I_i|$$

: 分割  $\Delta$  に関する上下からの見積もり

→

$$s_{\Delta} \leq \text{“面積”} \leq S_{\Delta}$$

分割  $\Delta$  を色々考えて、見積もりを精密にせよ。



## 積分の定義

全ての分割  $\Delta$  を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow s := \sup_{\Delta} s_{\Delta} : \text{下積分}$$

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow S := \inf_{\Delta} S_{\Delta} : \text{上積分}$$

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に  $s \leq S$  であるが、 $s = S$  とは限らない !!

## 積分の定義

$s = S$  のとき、これが“面積”と呼ぶべき唯一の値  
この時、

$f$  は  $I$  で**積分可能 (integrable)**

と言い、

この値を

$$\int_I f(x) dx \quad \left( \text{または} \int_a^b f(x) dx \right)$$

と書いて、

$f$  の  $I$  に於ける**定積分 (definite integral)**

と呼ぶ

例：

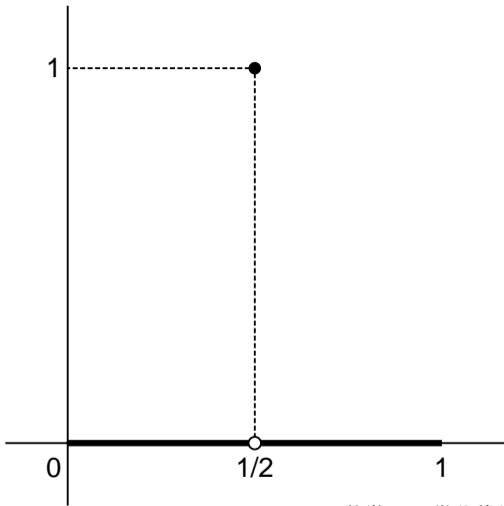
$$I = [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

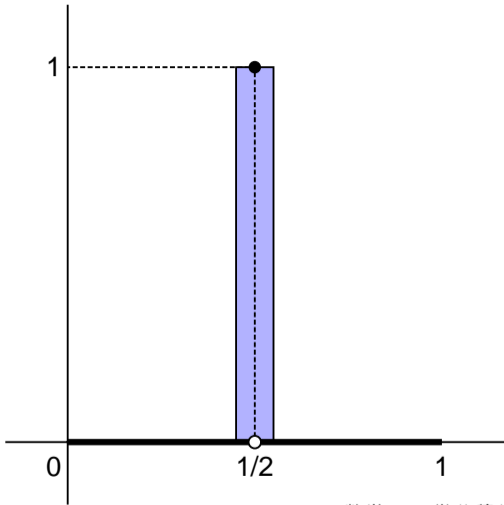
任意の分割  $\Delta$  に対し、 $s_{\Delta} = 0$

一方、 $\forall \varepsilon > 0$  に対し、 $S_{\Delta} \leq \varepsilon$  なる分割  $\Delta$  が存在

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x) dx$$





任意の分割を考えたので、  
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$  とし、

区間  $[a, b]$  に於ける下積分を  $s(a, b)$  と書くと、

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

任意の分割を考えたので、  
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$  とし、

区間  $[a, b]$  に於ける下積分を  $s(a, b)$  と書くと、

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

---

従って、

$f$  が 区間  $[a, c], [c, b]$  で積分可能  
 $\implies f$  は区間  $[a, b]$  でも積分可能で、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



ところで、積分を定義するのに  
全ての分割を考えることにしたということは、

- ( 前回の計算例のように )  
n 等分だけを考えたのでは不十分なのか？
- 実際に計算することは不可能なのではないか？

→ 実は大丈夫で、次の定理が成り立つ

ところで、積分を定義するのに  
全ての分割を考えることにしたということは、

- ( 前回の計算例のように )  
n 等分だけを考えたのでは不十分なのか？
  
- 実際に計算することは不可能なのではないか？

→ 実は大丈夫で、次の定理が成り立つ

ところで、積分を定義するのに  
全ての分割を考えることにしたということは、

- ( 前回の計算例のように )  
 $n$  等分だけを考えたのでは不十分なのか？
  
- 実際に計算することは不可能なのではないか？

→ 実は大丈夫で、次の定理が成り立つ

## Darboux の定理 :

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$  : 分割の列に対し、

$$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$  となるような分割の列  $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$   
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分

## Darboux の定理 :

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$  : 分割の列に対し、

$$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$



$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = S$$

(証明略)

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$  となるような分割の列  $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$   
(で計算し易いもの) を一揃い考えれば充分

定積分の値の見当がついているときには、  
次を利用することも出来る

$$\int_a^b f(x) dx = I$$



任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、  
[a, b] の或る分割  $\Delta = \Delta_\varepsilon$  が存在して、  
 $I - \varepsilon \leq s_\Delta, \quad S_\Delta \leq I + \varepsilon$

さて、先の例のように、  
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、  
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

さて、先の例のように、  
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、  
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!



さて、先の例のように、  
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、  
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

定理 (連続関数の積分可能性):

$f$ : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続  
(このとき自動的に有界)



$f$ :  $I$  に於いて積分可能

$s(x, y)$  : 区間  $[x, y]$  に於ける下積分

特に、 $s(x) := s(a, x)$  と書くとき

主張 :

$s(x) : [a, b]$  で微分可能で、  
 $s'(x) = f(x)$

即ち、

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$

$$0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

$s(x, y)$  : 区間  $[x, y]$  に於ける下積分

特に、 $s(x) := s(a, x)$  と書くとき

主張 :

$s(x) : [a, b]$  で微分可能で、  
 $s'(x) = f(x)$

即ち、

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$

$$0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

定理 :

$f$  : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続  
(このとき自動的に有界)



$f$  :  $I$  に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t) dt$$

(上端  $x$  の関数で、定積分関数と呼ぶ)  
が  $f$  の原始関数になっていることが判る

定理 :

$f$  : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続  
(このとき自動的に有界)



$f$  :  $I$  に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t) dt$$

(上端  $x$  の関数で、**定積分関数**と呼ぶ)  
が  $f$  の**原始関数**になっていることが判る

## 微分積分学の基本定理

$f$  : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続のとき

- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

即ち、 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  とおくと、

$F$  は  $f$  の原始関数 ( の一つ )

- $F$  を  $f$  の原始関数 ( の一つ ) とすると、

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

尚、下端  $a$  を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t) dt - \int_{a'}^x f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt$$

その差を気にしない（下端を指定しない）とき、

単に

$$\int f(x) dx$$

と書き、

$f$  の不定積分 (**indefinite integral**) と呼ぶ



一方、原始関数も、  
定数だけ違ってもやはり原始関数  
(微分したら同じ)なので、  
普通は定数の差を気にしない

### 微分積分学の基本定理

$f$ : 連続のとき、不定積分  $\equiv$  原始関数

- 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる
- 計算は今までに馴染みの  
諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、  
定数だけ違ってもやはり原始関数  
(微分したら同じ)なので、  
普通は定数の差を気にしない

### 微分積分学の基本定理

$f$ : 連続のとき、不定積分  $\equiv$  原始関数

→ 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる

→ 計算は今までに馴染みの  
諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、  
定数だけ違ってもやはり原始関数  
(微分したら同じ)なので、  
普通は定数の差を気にしない

### 微分積分学の基本定理

$f$ : 連続のとき、不定積分  $\equiv$  原始関数

- 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる
- 計算は今までに馴染みの  
諸公式・手法によれば良い