

## 期末試験のお知らせ

7月24日（月） 13:30 ~ 15:00

**12-502** 教室 （ここじゃない!!）

- 積分を巡る諸々  
（最終回(7/17)の講義内容まで）
- 中間試験前の内容も一部関連
- 学生証必携
- 「積分公式集」は配布する

## 積分法

- 統一的な求積法としての「定積分」
- 積分の上端を動かして、  
積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt : \text{「定積分関数」}$$

- 実は定積分関数を微分すると元の関数

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

## 積分の定義

仮定：

- 積分区間  $I = [a, b]$  : 有界閉区間
- 被積分関数  $f : I$  で 有界  
即ち、

$$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

定理 :

$f$  : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続  
(このとき自動的に有界)



$f$  :  $I$  に於いて積分可能

更に、その証明を振り返ると、

定積分関数  $\int_a^x f(t) dt$

が  $f$  の原始関数になっていることが判る

## 微分積分学の基本定理

$f$  : 閉区間  $I = [a, b]$  で連続のとき

- $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

即ち、 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  とおくと、

$F$  は  $f$  の原始関数 ( の一つ )

- $F$  を  $f$  の原始関数 ( の一つ ) とすると、

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

尚、下端  $a$  を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t) dt - \int_{a'}^x f(t) dt = \int_a^{a'} f(t) dt$$

その差を気にしない（下端を指定しない）とき、

単に

$$\int f(x) dx$$

と書き、

$f$  の不定積分 (**indefinite integral**) と呼ぶ

一方、原始関数も、  
定数だけ違ってもやはり原始関数  
(微分したら同じ)なので、  
普通は定数の差を気にしない

### 微分積分学の基本定理

$f$ : 連続のとき、不定積分  $\equiv$  原始関数

- 原始関数 (逆微分) を知れば積分が計算できる
- 計算は今までに馴染みの  
諸公式・手法によれば良い

ところで、前に見た  $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$  で、

$x = 1$  とすれば  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$  だから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義され**ない**!!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- 積分区間が半開区間  $I = [0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$
- しかもそこで被積分関数  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  が非有界

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

→ 広義積分・変格積分 (**improper integral**)

## 広義積分・変格積分 (improper integral)

- 区間が有界で、端点で関数が非有界

例：
$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

- 区間が非有界（無限区間）

例：
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

→ 共に、収束・発散の判定が重要

## 区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

$f : [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$  で定義され、  
 $x = b$  の近くで非有界だが、  
任意の (どんな小さい)  $\varepsilon > 0$  に対しても、  
 $[a, b - \varepsilon] = \{x \mid a \leq x \leq b - \varepsilon\}$  で  
有界かつ積分可能

とすると、各  $\varepsilon > 0$  に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が定義される

## 区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき、

$f$  は  $[a, b)$  で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

と書く（広義積分が収束するとも言う）

## 区間が非有界（無限区間）な場合

$f : [a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$  で定義され、  
任意の（どんな大きい） $M > a$  に対しても、  
 $[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$  で  
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x) dx$$

が定義される

## 区間が非有界（無限区間）な場合

この状況で、

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

が存在するとき、

$f$  は  $[a, +\infty)$  で**広義積分可能**と言い、

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

と書く（広義積分が収束するとも言う）

## 収束する広義積分の例

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

も同様

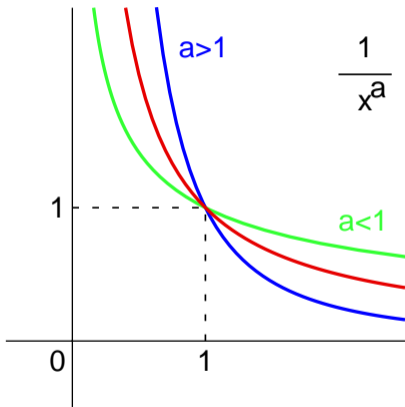
## 広義積分の収束判定 ( の例 )

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \implies \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \implies \text{発散} \end{cases}$$



## 広義積分の収束判定 (の例)



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha > 1 \implies$  収束

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha < 1 \implies$  収束

## 広義積分の収束判定 ( の例 )

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1+\varepsilon}}$$
$$\implies \int_1^{+\infty} f(x) dx : \text{収束}$$

$$\bullet \exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \frac{C}{x^{1-\varepsilon}}$$
$$\implies \int_0^1 f(x) dx : \text{収束}$$

注意： $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  は収束するとは言わ**ない**

→  $[-1, 0)$  と  $(0, 1]$  とに分けて 別々に 考える：

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\log \varepsilon \longrightarrow +\infty \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'} \frac{dx}{x} = \log \varepsilon' \longrightarrow -\infty \quad (\varepsilon' \rightarrow +0)$$

なので、 $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ ,  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$  はどちらも収束しない

## 広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x} \quad : \Gamma \text{ 関数}$$

(ガンマ関数)

- 広義積分は  $s > 0$  で収束
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n + 1) = n!$
- $\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$

## 広義積分で定義される関数の例

$$B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)} \quad : \text{B 関数}$$

(ベータ関数)

- 広義積分は  $s > 0, t > 0$  で収束

- $$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$