

4 平方数でない自然数 $N = 5, 6, 7, 8, 10, \dots$ などについて、 \sqrt{N} の正則連分数展開 $\sqrt{N} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ を循環するまで求めよ。また、連分数展開を用いて得られる \sqrt{N} の各段階の近似分数 $[a_0, a_1, \dots, a_i] = p_i/q_i$ を (直接、または漸化式

$$\begin{cases} p_{-1} = 1, & p_0 = a_0, & p_i = p_{i-1}a_i + p_{i-2} \\ q_{-1} = 0, & q_0 = 1, & q_i = q_{i-1}a_i + q_{i-2} \end{cases} \quad (i \geq 1)$$

によって) 求め、それに対し、 p_i/q_i の小数による近似値、および $p_i^2 - Nq_i^2$ を計算せよ。

(注: 各 p_i/q_i は \sqrt{N} に近いので、 $|p_i^2 - Nq_i^2|$ は小さい値になると期待される。特に、 $p_i^2 - Nq_i^2 = \pm 1$ となるのはどの段階か。)

• $N = 5$

$$\sqrt{5} = \frac{\boxed{}}{1} + (\sqrt{5} - \frac{\boxed{}}{1})$$

$$\frac{}{\sqrt{5} - \frac{\boxed{}}{1}} =$$

i	a_i	p_i	q_i	p_i/q_i (小数で)	$p_i^2 - 5q_i^2$
-1	--	1	0	---	1
0			1		
1					
2					
3					