

### 3 次方程式の根の公式 ( Fontana-Cardano の公式 )

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$  の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3乗根は掛けて  $-\frac{p}{3}$  となるように取る)

3乗根の1組を  $u, v$  とすると、( $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ )

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

## 演習問題

3 次方程式  $X^3 - 21X + 20 = 0$  を、

(1) 因数分解を見付けて解け。

(2) Fontana-Cardano の方法を辿って  
解いてみよ。  
また両者の結果を比べよ。

### 3 次多項式の判別式

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^3 (X - x_i) \quad \text{に対し、}$$

$$\begin{aligned} D(f) &:= \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &\quad : f \text{ の判別式 (discriminant)} \end{aligned}$$

- $x_1, x_2, x_3$  の対称式  
→ 係数 (基本対称式) で書ける
- $f(X)$  が重根を持つ  $\iff D(f) = 0$

### 3 次多項式の判別式

$$f(X) = X^3 + pX + q = \prod_{i=1}^3 (X - x_i) \quad \text{に対し、}$$

$$\begin{aligned} D(f) &:= \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i - x_j)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 \\ &\quad : f \text{ の判別式 (discriminant)} \end{aligned}$$

- $x_1, x_2, x_3$  の対称式  
→ 係数 (基本対称式) で書ける
- $f(X)$  が重根を持つ  $\iff D(f) = 0$

### 3 次多項式の判別式

根と係数との関係を用いて判別式を求めると、

$f(X) = X^3 + pX + q$  の判別式は

$$D = D(f) = -4p^3 - 27q^2$$

**Fontana-Cardano** の公式は次の形

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega - \omega^2)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{6(\omega^2 - \omega)}}$$

(2 次方程式と同様に、根に  $\sqrt{D}$  が現れる !! )

### 3 次方程式の “不還元の場合”

実は、3 実根を持つ 3 次方程式を

Fontana-Cardano の方法で解くと、

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{D}{108} < 0$$

となり、負数の平方根を経由する（不可避）

… “不還元の場合 (**Casus irreducibilis**)”

歴史上で、負数の平方根が扱われた最初

“存在しない” 数を形式的に扱おうと、

“存在する” 実根が計算できる

→ 数式の形式的な操作の有用性

### 3 次方程式の “不還元の場合”

実は、3 実根を持つ 3 次方程式を

Fontana-Cardano の方法で解くと、

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{D}{108} < 0$$

となり、負数の平方根を経由する（不可避）

… “不還元の場合 (Casus irreducibilis)”

歴史上で、負数の平方根が扱われた最初

“存在しない” 数を形式的に扱おうと、

“存在する” 実根が計算できる

→ 数式の形式的な操作の有用性

## 4 次方程式の解法の発見（16世紀前半, Ferrari）

### 3 次方程式の解法から間もなく

- 時代が熟していた？  
（考察の蓄積・記号法の発達など）
  
- 難しさの違いが少ない？  
→ “難しさ”ってどう計る？



## 4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数  $t$  を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる



$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは  $t$  の 3 次方程式

( **Fontana-Cardano** の公式で解ける !! )

→ この  $t$  を用いて解く

## 4 次多項式の 3 次分解式

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次分解式 ( 解核多項式, **resolvent** )

$T := 2t$  において、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{T}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

$R(T)$  が因数分解できる

$\iff f(X)$  の根が 3 乗根を用いずに表せる

## 演習問題

4 次方程式  $X^4 - 20X^2 + 32 = 0$  を、

(1)  $Y = X^2$  と置いて解け。

(2) Ferrari の方法を辿って

3 次分解式の根  $t$  を求め、  
それぞれの  $t$  の値を用いて解いてみよ。  
また、それぞれの結果を比べよ。

## 5 次以上の方程式の解法への模索

有力な方法の一つ：**Tschirnhaus** 変換

$$f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

に対し、

$$Y = X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-2}X + b_{n-1}$$

の形の変換で、

解ける方程式 ( $Y^n = c$  など) にならないか？

## 5 次以上の方程式の解法への模索

しかし、次の進展は、

3 次・4 次方程式の解法の発見から、  
200 年以上も待たねばならなかった

→ 200 年後（18 世紀後半）：**Lagrange** の考察

今まで何故うまく行ったかを詳細に分析  
（**群論**の萌芽・**Galois 理論**への一步）

実は、4 次以下と 5 次以上とでは、  
問題の難しさが本質的に違った  
のだった

## 5 次以上の方程式の解法への模索

しかし、次の進展は、

3 次・4 次方程式の解法の発見から、  
200 年以上も待たねばならなかった

→ 200 年後（18 世紀後半）：**Lagrange** の考察

今まで何故うまく行ったかを詳細に分析  
（**群論**の萌芽・**Galois 理論**への一步）

実は、4 次以下と 5 次以上とでは、  
問題の難しさが本質的に違った  
のだった

## Lagrange から Galois へ

**Lagrange :**

根の入替えによって、式の値がどう変わるか？

- どう入替えても変わらない・・・ 対称式  
→ 方程式の係数で書ける（根と係数との関係）
- 根そのもの・・・ 入替えただけ変わる

程々に変わり程々に変わらない式を考えたら、  
方程式を解く中間段階になるのでは？

## Lagrange から Galois へ

**Lagrange :**

根の入替えによって、式の値がどう変わるか？

- どう入替えても変わらない・・・ 対称式  
→ 方程式の係数で書ける（根と係数との関係）
- 根そのものの・・・ 入替えただけ変わる

程々に変わり程々に変わらない式を考えたら、  
方程式を解く中間段階になるのでは？



## Lagrange から Galois へ

**Lagrange :**

根の入替えによって、式の値がどう変わるか？

- どう入替えても変わらない・・・ 対称式  
→ 方程式の係数で書ける（根と係数との関係）
- 根そのものの・・・ 入替えただけ変わる

程々に変わり程々に変わらない式を考えたら、  
方程式を解く中間段階になるのでは？

## Lagrange から Galois へ

**Galois :**

根の入替え方と方程式を解く段階との対応を

更に詳細に考察

### 定理

5 次以上の一般の方程式の根を、  
係数に四則演算と冪根とを有限回施して  
表わすことは出来ない  
(根の公式が存在しない)

## Lagrange から Galois へ

**Galois :**

根の入替え方と方程式を解く段階との対応を  
更に詳細に考察

### 定理

5 次以上の一般の方程式の根を、  
係数に四則演算と冪根とを有限回施して  
表わすことは出来ない  
(根の公式が存在しない)

それでは、

佳いお年を