まとめ並びに演習問題及び補足（01/18 配布）

8. $\boldsymbol{R}$ を規定する公理たち

本節では、実数全体の成す順序体 $\boldsymbol{R}$ を、有理数全体の成す順序体 $\boldsymbol{Q}$ を含み所定の公理を満たすものとして定式化する、という立場で考える。

有理数全体の成す順序体 $\boldsymbol{Q}$ を含む順序体 R に対し、次は同値である：

(1) （Dedekind の公理）R の切断 (A, B) には、$\max A, \min B$ のどちらかが存在する。
(2) （上限の存在）R の空でない部分集合 X が上に有界ならば、上限 $\sup X$ が存在する。
(3) （有界単調数列の収束）R 内の上に有界な単調非減少数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ は、（その上限に）収束する。
(4) （上極限の存在）R 内の有界な数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、上極限 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ が存在する。
(5) （Bolzano-Weierstrass の原理）R 内の有界な数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、集積点が存在する。
(6) （Archimedes の原理）任意の正数 $\varepsilon, M > 0$ に対し、自然数 $N \in \boldsymbol{N}$ が存在して、$N\varepsilon > M$ となる。+（縮小区間列の原理）R 内の閉区間の列 $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ が縮小区間列ならば、$\displaystyle\bigcap_{n\geq 0} I_n$ は丁度 1 点のみから成る。
(7) （Archimedes の原理）+（Cauchy 列の収束）R 内の Cauchy 列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ は、或る $\alpha \in R$ に収束する。（このとき R は完備であるという。）

$\boldsymbol{Q}$ を含み上のいずれか（従って全て）を満たす順序体は、自然な同型を除いて一意的である。即ち、R, R' がともに条件を満たすとするとき、順序体の構造を保つ全単射 $\varphi : R \longrightarrow R'$ で、$\boldsymbol{Q}$ 上では恒等写像であるものが一意的に存在する。そこで、この同型を除いて定まる順序体を実数体と呼んで $\boldsymbol{R}$ と書き、その元を実数という。

以下、R を $\boldsymbol{Q}$ を含む順序体（または素朴に知っている実数体 $\boldsymbol{R}$）とし、上に現れた用語の定義を述べながら、問を挙げる。

問 8-1A. $a \in R$ に対し、$\forall\varepsilon > 0 : a < \varepsilon$ ならば $a \leq 0$ である。特に、$\forall\varepsilon > 0 : |a| < \varepsilon$ ならば $a = 0$ である。

問 8-2A. R の部分集合 M の最小の上界を上限といい、$\sup M$ と書く。$x = \sup M$ であることは次で特徴づけられる：

(1) $\forall m \in M : m \leq x$
(2) $\forall\varepsilon > 0 : \exists m \in M : x - \varepsilon < m$

問 8-3A. R の部分集合 M の下限 $\inf M$ について同様のことを考えよ。

問 8-4A. R の部分集合 M に最大値 $\max M$ が存在すれば、それは上限 $\sup M$ でもある。最小値・下限についても同様。

問 8-5A. $\boldsymbol{R}$ の次の部分集合の最大値・最小値・上限・下限は存在するか。存在するならその値は何か。

(1) 閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x \leq b\}$
(2) 開区間 $I = (a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x < b\}$
(3) 無限閉区間 $I = [a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x\}$
(4) 無限開区間 $I = (a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x\}$

問 8-6B. $\boldsymbol{R}$ の区間について次が成り立つ：

(1) $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon>0}[a+\varepsilon, b-\varepsilon] = (a, b)$　　(2) $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0}(a-\varepsilon, b+\varepsilon) = [a, b]$

問 8-7B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ については、その値のなす集合 $\{a_n | n \in \boldsymbol{N}\}$ の上限を $\boldsymbol{a}$ の上限といい、ここでは、以下、単に $\sup \boldsymbol{a}$ と書くことにする。数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$\sup \boldsymbol{a}, \sup \boldsymbol{b}$ が共に存在するとき、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$ で定める数列 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ について、$\sup(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \leq \sup \boldsymbol{a} + \sup \boldsymbol{b}$ であることを示せ。また、等号が成り立たない例を挙げよ。

問 8-8B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ において、各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $b_n := \sup\{a_m | m \geq n\}$ が存在するとき、数列 $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ は単調非増加、即ち $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ （広義単調減少ともいう。ここでは以下、これを単に単調減少ということにする。）であり、この $\boldsymbol{b}$ の下限 $\inf \boldsymbol{b}$ を、数列 $\boldsymbol{a}$ の上極限と言って、$\limsup_{n\to\infty} a_n, \overline{\lim}\, a_n, \limsup \boldsymbol{a}$ 等と書く。

(1) 上極限は次の性質で特徴付けられることを示せ：$x = \limsup_{n\to\infty} a_n \iff$
- $\forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \boldsymbol{N} : \exists m > n : a_m > x - \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \boldsymbol{N} : \forall m > n : a_m < x + \varepsilon$

(2) 下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n, \underline{\lim}\, a_n, \liminf \boldsymbol{a}$ も同様に定義せよ。また、上のような特徴付けを書いてみよ。

問 8-9B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、上極限・下極限がともに存在して一致すれば、$\boldsymbol{a}$ はその値に収束することを示せ。

問 8-10A. 次で定まる実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ の上極限・下極限は何か。

(1) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$　　(2) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$　　(3) $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$

問 8-11B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ において、α が次の性質を満たすとき $\boldsymbol{a}$ の集積値（の一つ）であるという：
- $\forall \varepsilon > 0 : \forall N \in \boldsymbol{N} : \exists m > N : |a_m - \alpha| < \varepsilon$

（これは、α から距離 ε 以内に無限個の a_n がある、ということと同じである。）

(1) 集積値が複数ある実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。
(2) 集積値が無限個ある実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。
(3) $\boldsymbol{a}$ の上極限が存在すれば、それは最大の集積値であることを示せ。（下極限についても同様。）
(4) $\boldsymbol{a}$ が収束すれば、その極限は唯一の集積値であることを示せ。
(5) 集積値がただ一つであっても収束しない実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。

問 8-12B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ に対し、単調増加な自然数列（番号列）$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ を用いて、$(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ で定まる数列を $\boldsymbol{a}$ の部分列という。Bolzano-Weierstrass の原理は次のようにも言い換えられる：
- R 内の有界な数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、収束部分列が存在する。

問 8-13B. 順序体 R における Archimedes の原理は次の各々と同値であることを示せ：

(1) 自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ が R 内で上に有界でない。
(2) $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$
（注：これは ε-δ 流でちゃんと書くと、$\forall M \in R : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \in \boldsymbol{N} : n > N \Longrightarrow n > M$ ということ（任意の R の元 M に対して然るべき $\boldsymbol{N}$ の元 N の存在を主張）であるから、決して単なる同語反復的命題ではない。）
(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

問 8-14B. 縮小区間列の原理では、各区間 $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n \leq x \leq b_n\}$ が閉区間であることが重要である。実数の開区間の縮小列 $I_n = (a_n, b_n) = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n < x < b_n\}$ で、$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \emptyset$ となる例を挙げよ。また、半開区間と呼ばれる $[a_n, b_n) = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n \leq x < b_n\}$（または、$(a_n, b_n] = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n < x \leq b_n\}$）の形の区間列ではどうか。

問 8-15B. 通常の十進小数表記で与えられた実数 $\alpha = d_0.d_1 d_2 d_3 \cdots$ （$d_0 \in \boldsymbol{Z}$ で $d_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ は小数第 n 位の数値、簡単のため $d_0 \geq 0$ と考えて良い）に対し、

(1) 有理数 $a_n, b_n \in \boldsymbol{Q}$ を端点とする縮小区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ で、$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{\alpha\}$ となるものの例を挙げよ。
(2) α に収束する有理 Cauchy 列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ $(a_n \in \boldsymbol{Q})$ の例を挙げよ。

問 8-16D. Archimedes の原理が成立しない順序体の例を挙げよ。更にその中で、完備（Cauchy 列が必ず収束する）な例を挙げよ。

9. 関数の収束・極限・連続性

本節では、前節の公理を満たす順序体として実数全体の成す順序体 $\boldsymbol{R}$ を基礎づけた上で、$\boldsymbol{R}$ 上で定義され $\boldsymbol{R}$ に値を取る関数 $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ に関する、収束・極限・連続性について考える。

関数の収束について以下で定義する：関数 $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ と $a\in\boldsymbol{R}$ について、

- $x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow\alpha$
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\in\boldsymbol{R}:0<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon$
- $x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow+\infty$
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\forall K\in\boldsymbol{R}:\exists\delta>0:\forall x\in\boldsymbol{R}:0<|x-a|<\delta\Longrightarrow f(x)>K$
- $f(x)\longrightarrow-\infty$ も同様（しかるべく定式化せよ）

$x\longrightarrow\pm\infty$ のときの極限も考える：

- $x\longrightarrow+\infty$ のとき $f(x)\longrightarrow\alpha$
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon>0:\exists M\in\boldsymbol{R}:\forall x\in\boldsymbol{R}:x>M\Longrightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon$
- $x\longrightarrow+\infty$ のとき $f(x)\longrightarrow+\infty$
  $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\forall\varepsilon>0:\exists M\in\boldsymbol{R}:\forall x\in\boldsymbol{R}:x>M\Longrightarrow f(x)>K$
- $f(x)\longrightarrow-\infty$ および $x\longrightarrow-\infty$ も同様（しかるべく定式化せよ）

関数の定義域は、しばしば $\boldsymbol{R}$ 全体ではなく、その一部 $I\subset\boldsymbol{R}$ のみ（多くは適当な区間）のこともある。このとき、I 上定義された実数値関数という。また、$\boldsymbol{R}$ 全体で定義された関数を、$I\subset\boldsymbol{R}$ に制限して考えるときもある。

関数 f の有界性については次で定義する：

- f が I で有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\exists C>0:\forall x\in I:|f(x)|<C$
- f が I で上に有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\exists C\in\boldsymbol{R}:\forall x\in I:f(x)<C$
- f が I で下に有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}\exists C\in\boldsymbol{R}:\forall x\in I:f(x)>C$

関数 f の連続性については次で定義する：関数 $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ と $a\in\boldsymbol{R}$ について、

- f が a で連続 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow}x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow f(a)$
  （ここだけ読むと高校で学んだ定義と同じだが、収束の基礎付けとして次があることに注意せよ。）
  $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\in\boldsymbol{R}:|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

関数 f が I 内の任意の $a\in I$ で連続のとき、I で連続であるという。また、$\boldsymbol{R}$ 全体（定義域全体）で連続のとき、単に連続であるという。

問 9-1A. 関数 f と $a\in\boldsymbol{R}$ について、「$x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow\alpha$」でない（$x\longrightarrow a$ で $f(x)$ が α に収束しない）ということを、論理式で記述せよ。「$f(x)\longrightarrow\pm\infty$」や「$x\longrightarrow\pm\infty$ のとき」についても、同様に否定命題を書いてみよ。

問 9-2B. 関数 f が $x\longrightarrow a$ で収束するとき、その極限値は一意であること（即ち、$x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow\alpha$ かつ $f(x)\longrightarrow\beta$ ならば、$\alpha=\beta$）を示せ。この一意に定まる極限値を $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}f(x)$ と書く。$x\longrightarrow\pm\infty$ の場合も同様。

（注：このとき、表記 $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}f(x)$ は極限の「値」（一つの実数）を意味する。一つの実数なので、実数に対して定義された演算・大小比較・極限操作などが自在に出来る。一方、$x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow+\infty$ となる場合にも、$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=+\infty$ と書くこともある（多い）が、このときの左辺は値を表しているわけではなく、式全体で単に「$x\longrightarrow a$ のとき $f(x)\longrightarrow+\infty$」である「こと」を表している便宜上の表記に過ぎない。実数値ではないので）

問 9-3B. 関数 f,g について、$x\longrightarrow a$ のとき、$f(x)\longrightarrow\alpha,g(x)\longrightarrow\beta$ ならば、$f(x)+g(x)\longrightarrow\alpha+\beta$ であることを示せ。

問 9-4C. 関数 f,g について、$x\longrightarrow a$ のとき、$f(x)\longrightarrow\alpha,g(x)\longrightarrow\beta$ ならば、$f(x)g(x)\longrightarrow\alpha\beta$ であることを示せ。

問 9-5B. 関数 f について、$x\longrightarrow a$ のとき、$f(x)\longrightarrow\alpha$ かつ $\alpha>0$ ならば、或る $\delta>0$ が存在して、$0<|x-a|<\delta$ ならば $f(x)>0$ であることを示せ。（このことを a の十分近くで $f(x)>0$ とも言う。）

問 9-6C.　関数 f, g について、$x \longrightarrow a$ のとき、$f(x) \longrightarrow \alpha, g(x) \longrightarrow \beta$ かつ $\beta \neq 0$ ならば、$f(x)/g(x) \longrightarrow \alpha/\beta$ であることを示せ。

問 9-7B.　上の何問かの $x \longrightarrow \pm\infty$ 版を与えよ。

問 9-8B.　関数 f, g について、$a \in \boldsymbol{R}$ で連続であれば、$f(x) + g(x)$ も $a \in \boldsymbol{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-9C.　関数 f, g について、$a \in \boldsymbol{R}$ で連続であれば、$f(x)g(x)$ も $a \in \boldsymbol{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-10B.　関数 f について、$a \in \boldsymbol{R}$ で連続かつ $f(a) > 0$ であれば、或る $\delta > 0$ が存在して、$|x - a| < \delta$ ならば $f(x) > 0$（a の十分近くで $f(x) > 0$）であることを示せ。

問 9-11C.　関数 f, g について、$a \in \boldsymbol{R}$ で連続かつ $g(a) \neq 0$ であれば、$f(x)/g(x)$ も $a \in \boldsymbol{R}$ で連続であることを示せ。

問 9-12B.　次の関数が連続であることを、（直接）定義に順って示せ。

(1) $f(x) = x$　　(2) $f(x) = x^2$　　(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$（但し、$x \neq 0$ で）

問 9-13D.　関数 f と実数 $a, \alpha \in \boldsymbol{R}$ について、次は同値である：

(1) $x \longrightarrow a$ のとき、$f(x) \longrightarrow \alpha$

(2) $x_n \longrightarrow a$ となる任意の実数列 $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$f(x_n) \longrightarrow \alpha$

問 9-14C.　$x \neq 0$ で定義された次の関数 f の $x \longrightarrow 0$ での極限について吟味せよ。

(1) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$　　(2) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

問 9-15B.　次で定まる関数 f は、任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ で不連続であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \boldsymbol{Q}) \\ 0 & (x \notin \boldsymbol{Q}) \end{cases}$$

問 9-16D.　次で定まる関数 f の連続性について吟味せよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} x & (x \in \boldsymbol{Q}) \\ 0 & (x \notin \boldsymbol{Q}) \end{cases}$　(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & (x = \dfrac{p}{q} \in \boldsymbol{Q}, p, q \in \boldsymbol{Z}, \text{互いに素}, q > 0) \\ 0 & (x \notin \boldsymbol{Q}) \end{cases}$

問 9-17D.　（中間値の定理）有界閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x \leq b\}$ で連続な関数 f について、$f(a) < 0, f(b) > 0$ ならば、$f(c) = 0$ となる $c \in I$ が存在する。（注：前節で挙げた「実数の連続性の公理」が本質的に必要な定理である。同値な条件のうちのどれかの形を用いて示してみよ。）

問 9-18C.　中間値の定理を用いて、次を示せ：$\boldsymbol{R}$ 上定義された連続関数 f について、$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ならば、$f(c) = 0$ となる $c \in \boldsymbol{R}$ が存在する。

問 9-19D.　（最大値の定理）有界閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x \leq b\}$ で連続な関数 f について、

(1) 値域 $f(I) := \{f(x) | x \in I\}$ は有界である。

(2) 値域 $f(I)$ には最大値・最小値が存在する。（値域 $f(I)$ が有界であるから、その上限・下限が存在するが、その値が値域に属する。即ち、或る $c \in I$ によって関数値 $f(c)$ として実現される。）

問 9-20C.　有界であっても閉でない定義域（例えば開区間 $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x < b\}$）の上で定義された連続関数では、最大値の定理は成立するとは限らない。例を挙げよ。

期末試験について

- 期日：期末試験期間中に行なう（詳細は Loyola で確認のこと）
- 内容：授業で取り上げた内容のうちで、基本的な概念の理解や簡単な証明（適切な書き方も含む）について。期間中の演習課題も範囲に含まれる。授業時に講義した証明の難しい部分については試験で問うに適切な範囲を超えるが、それを理解しようと取り組んだことは、基本的な概念の理解や証明の書き方の練習となり、試験に臨む準備となるだろう。