

2 Peano の公理系に基づいて、自然数の集合 N 上に加法・乗法を定めていく。以下の証明では帰納法を駆使するが、その際に、証明中で帰納法の仮定を用いる所を明記せよ。

(1) N に於ける加法 $+$ を次で定める：

- $n + 0 := n$
- $n + m' := (n + m)'$

このとき、結合律

$$\forall a, b, c \in N : (a + b) + c = a + (b + c)$$

を示せ。

(ヒント： $a, b \in N$ を任意に固定し、 c に関する帰納法を用いる。即ち、

(a) $a, b, 0 \in N$ に対し成立 ($c = 0$ のとき成立)

(b) $a, b, c \in N$ に対し成立 (帰納法の仮定) $\implies a, b, c' \in N$ に対し成立を示す。)

(2) \mathbf{N} に於ける加法 $+$ は既に定義されていて、可換律・結合律や $a' + b = a + b'$ となることなどの基本性質は証明済みとする。その上で、 \mathbf{N} に於ける乗法 \cdot を次で定める：

- $n \cdot 0 := 0$
- $n \cdot m' := n \cdot m + n$

このとき、

(a) $\forall a, b \in \mathbf{N} : a' \cdot b = a \cdot b + b$ を示せ。

(ヒント： a を任意に固定して、 b に関する帰納法。乗法の可換律はまだ示されていないことに注意。)

(b) $\forall a \in \mathbf{N} : 0 \cdot a = 0$ を示せ。

(ヒント： a に関する帰納法。乗法の可換律はまだ示されていないことに注意。)

(c) 可換律 $\forall a, b \in \mathbf{N} : a \cdot b = b \cdot a$ を示せ。

(ヒント： a を任意に固定して、 b に関する帰納法。(a),(b) を用いよ。)