

有限オートマトン (06/18 配布)

(決定性)有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- Q : 有限集合 … 状態の集合
- Σ : 有限集合 … 入力文字の集合 (“alphabet”)
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$: 遷移関数
- $s \in Q$ … 初期状態
- $F \subset Q$ … 受理状態の集合

(決定性)有限オートマトンによる語の受理

有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ が語 $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ を受理 (accept) する
 $\iff \exists r_0, r_1, \dots, r_n \in Q$:

- $r_0 = s$
- $\delta(r_{i-1}, a_i) = r_i$ ($i = 1, \dots, n$)
- $r_n \in F$

非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- Q : 有限集合 … 状態の集合
- Σ : 有限集合 … alphabet, $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$: 遷移関数 … 可能な遷移先全体の集合
($\mathcal{P}(Q)$ は Q の冪集合)
- $s \in Q$ … 初期状態
- $F \subset Q$ … 受理状態の集合

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ が語 $w \in \Sigma^*$ を受理する
 $\iff \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma_\varepsilon, \exists r_0, r_1, \dots, r_n \in Q$:

- $w = a_1 a_2 \cdots a_n$
- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ ($i = 1, \dots, n$)
- $r_n \in F$

決定性有限オートマトンと非決定性有限オートマトンとの同値性

与えられた非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ に対し、 M が認識する言語 $L(M)$ を認識する決定性有限オートマトン $\tilde{M} := (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ が次で構成できる：
まず、各状態 $q \in Q$ に対し、 $E(q) \subset Q$ を次で定める：

$$E_0(q) := \{q\}, \quad E_{i+1}(q) := \bigcup_{r \in E_i(q)} \delta(r, \varepsilon), \quad E(q) := \bigcup_{i \geq 0} E_i(q)$$

($E(q)$ は状態 q から入力を何も読まずに遷移できる状態全体)

- $\tilde{Q} := \mathcal{P}(Q)$: 現在あり得る状態全体の集合
- $\tilde{\delta} : \tilde{Q} \times \Sigma \rightarrow \tilde{Q}$: \tilde{q} の何処かから入力 x で遷移できる状態全体

$$(\tilde{q}, x) \mapsto \tilde{\delta}(\tilde{q}, x) := \bigcup_{q \in \tilde{q}} \left(\bigcup_{r \in \delta(q, x)} E(r) \right)$$

- $\tilde{s} := E(s)$
- $\tilde{F} := \{\tilde{q} \in \tilde{Q} \mid \tilde{q} \cap F \neq \emptyset\}$: あり得る状態のどれかが受理状態

正規言語に対する Pumping Lemma (注入補題・反復補題)

正規言語 A に対し、

$\exists n \in \mathbf{N} : \forall w \in A, |w| \geq n : \exists x, y, z \in \Sigma^*, w = xyz$ s.t.

- (1) $y \neq \varepsilon$
- (2) $|xy| \leq n$
- (3) $\forall k \geq 0 : xy^kz \in A$

非決定性プッシュダウンオートマトン $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ の形式的定義

- Q : 有限集合 … 状態の集合
- Σ : 有限集合 … alphabet, $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- Γ : 有限集合 … stack alphabet, $\Gamma_\varepsilon := \Gamma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$: 遷移関数 (非決定的) … 可能な遷移先全体の集合
- $s \in Q$ … 初期状態
- $F \subset Q$ … 受理状態の集合

生成文法における Chomsky の標準形

- 正規言語の生成規則は次の形に出来る
 - * $X \rightarrow xY$ ($X, Y \in V, x \in \Sigma$)
 - * $X \rightarrow x$ ($X \in V, x \in \Sigma_\varepsilon$)
- 文脈自由言語の生成規則は次の形に出来る
 - * $X \rightarrow YZ$ ($X, Y, Z \in V$)
 - * $X \rightarrow x$ ($X \in V, x \in \Sigma_\varepsilon$)

文脈自由言語に対する Pumping Lemma

文脈自由言語 A に対し、

$\exists n \in \mathbf{N} : \forall w \in A, |w| \geq n : \exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* : w = uvxyz$ s.t.

- (1) $vy \neq \varepsilon$
- (2) $|vxy| \leq n$
- (3) $\forall k \geq 0 : uv^kxy^kz \in A$