代表的な計算モデル

- **有限オートマトン（有限状態機械）**
- **プッシュダウンオートマトン**
- **チューリングマシン**

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ **正規言語・正規表現**

語の演算

語 $v = a_1 \cdots a_k, w = b_1 \cdots b_l \in \Sigma^*$ **に対し**

$$vw := a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_l$$

：連結・連接 (concatnation)

連接演算により Σ^* **は単位的自由半群を成す**

$S = (S, \cdot)$ **：半群 (semigroup)**

$$\Updownarrow$$

$\cdot : S \times S \longrightarrow S$ **：二項演算で結合律を満たす**

正規演算

言語 $A, B \subset \Sigma^*$ に対し、

- $A \cup B := \{w | w \in A$ または $w \in B\}$
  ：和集合演算
- $AB = A \circ B := \{vw | v \in A, w \in B\}$
  ：連結（連接）演算
- $A^* := \{w_1 w_2 \cdots w_n | n \geq 0, w_i \in A\}$
  ：star 演算

（言語全体の集合 $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ 上の演算）

正規表現 (regular expression)

- 空集合記号 $\emptyset$ は正規表現
- 空列記号 ε は正規表現
- 各文字 $a \in \Sigma$ は正規表現
- 正規表現 R, S に対し
  $(R \cup S)$ は正規表現（$(R|S)$ とも書く）
- 正規表現 R, S に対し
  $(R \circ S)$ は正規表現（(RS) とも書く）
- 正規表現 R に対し R^* は正規表現
- 以上のものだけが正規表現

$\cdots$ **帰納的導出**による定義

正規言語 (regular language)

正規表現 R に対し、言語 $L(R)$ を次で定める：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$ **(**$a \in \Sigma$**)**
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

正規表現で表される言語 $\cdots$ **正規言語**

定理：

$$\mathrm{L}\text{：正規言語}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{L}\text{ が或る有限オートマトンで認識される}$$

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

$\cdots$ **非決定性有限オートマトン**
(Non-deterministic finite automaton)

その説明の前に、今回は、

ここで現れる色々な概念を

集合・写像などの言葉を用いて記述する練習

（演習問題）

演習問題：Σ **を alphabet とする。以下を記述せよ。**

(1) L **：言語**

(a) **文字** $a \in \Sigma$ **に対し、語に左（resp. 右）から文字** a **を連接させる写像** ℓ_a **(resp.** r_a**)**

(b) **語** $w \in \Sigma^*$ **に対し、語に左（resp. 右）から文字列** w **を連接させる写像** ℓ_w **(resp.** r_w**)（語の長さ** $|w|$ **に関する帰納的定義で）**

(c) **語** $w \in \Sigma^*$ **の後に連接すると** L **の元になる語全体の成す集合** $S_{\mathrm{L}}(w)$ **を与える写像** S_{L}

(2) $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **：有限オートマトン**

(a) **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態** $\widetilde{\delta}(q, w)$ **を与える写像** $\widetilde{\delta}$ **（語の長さ** $|w|$ **に関する帰納的定義で）**

(b) **特に、**M **が語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態を与える写像** $\widetilde{\delta}_0$

(c) M **が認識する言語** $L(M)$

(d) **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して、その後に読めば受理される語全体の成す集合** $\varphi_M(q)$ **を与える写像** φ_M

「非決定性」とは　　$\cdots$ あてずっぽう有り

状態の遷移先を一意に決めない
（幾つかあって分岐していく）

$\longrightarrow$ どれかが受理すれば OK !!

- 手分けをして誰かが受理出来れば良い
- どの道を辿れば良いか知っていて、受理が検証出来れば良い

と考えることも出来る

「非決定性」とは $\cdots$ **あてずっぽう有り**

状態の遷移先を一意に決めない
（幾つかあって分岐していく）

$\longrightarrow$ **どれかが受理すれば OK !!**

- **手分けをして誰かが受理出来れば良い**
- **どの道を辿れば良いか知っていて、**
  受理が検証出来れば良い

と考えることも出来る

非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q：有限集合 $\cdots$ 状態の集合
- Σ：有限集合 $\cdots$ alphabet, $\quad \Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$：遷移関数
  $\cdots$ 可能な遷移先全体の集合を与える
- $s \in Q$ $\cdots$ 初期状態
- $F \subset Q$ $\cdots$ 受理状態の集合

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語 $w \in \Sigma^*$ **を受理する**

$$\Updownarrow$$

$\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma_\varepsilon : w = a_1 a_2 \cdots a_n$

$\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q :$

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ **(**$i = 1, \ldots, n$**)**
- $r_n \in F$

$L(M)$ **：**M **が受理する語の全体**

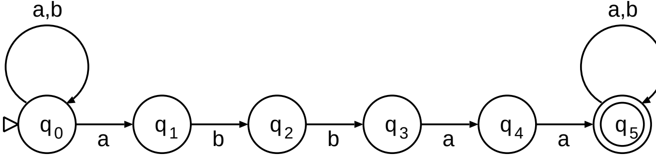
$\cdots$ M **が認識する言語**

非決定性有限オートマトンによる語の受理

- $r_i \in \delta(r_{i-1}, \varepsilon)$ とは、
  「入力を読まずに
  状態 r_{i-1} から状態 r_i に移って良い」
  ということ

- $\delta(r_{i-1}, a_i) = \emptyset$ （矢印が出ていない）
  ということもある
  $\longrightarrow$ 受理されない分岐の
  行き止まりに入ってしまった
  $\longrightarrow$ 他の分岐が生きていれば問題無し

非決定性有限オートマトンの例
（状態遷移図による表示）



定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る非決定性有限オートマトンで認識される

これは比較的容易

正規言語の帰納的定義に沿って構成

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る**非決定性**有限オートマトンで
認識される

これは比較的容易

正規言語の帰納的定義に沿って構成

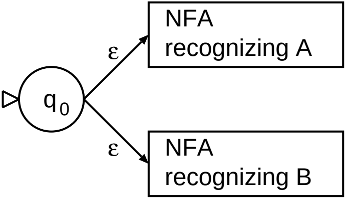
正規言語を認識する NFA の構成

正規言語：

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

(1) 言語 $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$ を認識する NFA を構成
(2) 言語 A, B を認識する NFA から、
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

$A \cup B$ を認識する非決定性有限オートマトンの構成

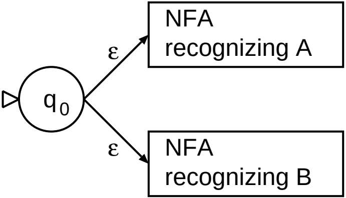


これを形式的な定式化の下で書き下すには？

A を認識する NFA $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$
B を認識する NFA $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$
$\longrightarrow A \cup B$ を認識する NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

を構成

$A \cup B$ を認識する非決定性有限オートマトンの構成



これを形式的な定式化の下で書き下すには？

A **を認識する NFA** $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$
B **を認識する NFA** $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$
$\longrightarrow$ $A \cup B$ **を認識する NFA** $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$
を構成

このようなことを考えるときには、
いろいろ準備しておくと良い

例： NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **において、**
受理状態は一つとして良い

「として良い」とは？

NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **に対し、**
NFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$ **で、**
$L(M) = L(M')$ **かつ** $\#F' = 1$ **なるものが存在する。**

このようなことを考えるときには、
いろいろ準備しておくと良い

例：NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **において、**
受理状態は一つとして良い

「として良い」とは？

NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **に対し、**
NFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$ **で、**
$L(M) = L(M')$ **かつ** $\#F' = 1$ **なるものが存在する。**

このようなことを考えるときには、
いろいろ準備しておくと良い

例：NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **において、**
受理状態は一つとして良い

「として良い」とは？

NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **に対し、**
NFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$ **で、**
$L(M) = L(M')$ **かつ** $\#F' = 1$ **なるものが存在する。**

言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA の構成

A を認識する NFA $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$
B を認識する NFA $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$

から

$A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成