

代表的な計算モデル

- 有限オートマトン (有限状態機械)
- プッシュダウンオートマトン
- チューリングマシン

定理 :

L : 正規言語



L が或る有限オートマトンで認識される

このような一般論を考えるには、
有限オートマトンの概念を
少し一般化する方が良い

… **非決定性有限オートマトン**
(Non-deterministic finite automaton)

非決定性有限オートマトンの形式的定義

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

ここに、

- Q : 有限集合 ... 状態の集合
- Σ : 有限集合 ... **alphabet**, $\Sigma_\epsilon := \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$: 遷移関数
... 可能な遷移先全体の集合を与える
- $s \in Q$... 初期状態
- $F \subset Q$... 受理状態の集合

非決定性有限オートマトンによる語の受理

非決定性有限オートマトン

$$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$$

が、語 $w \in \Sigma^*$ を受理する



$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma_\varepsilon : w = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\exists r_0, r_1, \dots, r_n \in Q :$$

- $r_0 = s$
- $r_i \in \delta(r_{i-1}, a_i)$ ($i = 1, \dots, n$)
- $r_n \in F$

$L(M)$: M が受理する語の全体

… M が認識する言語

定理

言語 L に対し、次は同値：

- (1) L : 正規言語
- (2) L が或る非決定性有限オートマトンで
認識される
- (3) L が或る決定性有限オートマトンで
認識される

(3) \Rightarrow (2) : ほぼ自明

(1) \Rightarrow (2) : 正規言語の帰納的定義に沿って構成

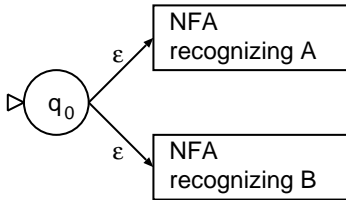
正規言語を認識する NFA の構成

正規言語 :

- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(R \cup S) = L(R) \cup L(S)$
- $L(R \circ S) = L(R) \circ L(S)$
- $L(R^*) = L(R)^*$

- (1) 言語 $L(\emptyset), L(\varepsilon), L(a)$ を認識する NFA を構成
- (2) 言語 A, B を認識する NFA から、
言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

$A \cup B$ を認識する非決定性有限オートマトンの構成



これを形式的な定式化の下で書き下すには？

A を認識する **NFA** $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$

B を認識する **NFA** $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$

→ $A \cup B$ を認識する **NFA** $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

を構成

言語 $A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA の構成

A を認識する NFA $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$

B を認識する NFA $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$

から

$A \cup B, A \circ B, A^*$ を認識する NFA を構成

定理

言語 L に対し、次は同値：

- (1) L : 正規言語
- (2) L が或る **NFA** で認識される
- (3) L が或る **DFA** で認識される

(2) \Rightarrow (1) : **NFA** から正規表現を復元
(矢印に正規表現が付いた、
或る種の一般化された **NFA** を考える)

(2) \Rightarrow (3) : **NFA** M に対し、
 $L(M)$ を認識する **DFA** \widetilde{M} を構成

定理

言語 L に対し、次は同値：

- (1) L : 正規言語
- (2) L が或る **NFA** で認識される
- (3) L が或る **DFA** で認識される

(2) \Rightarrow (1) : **NFA** から正規表現を復元
(矢印に正規表現が付いた、
或る種の一般化された **NFA** を考える)

(2) \Rightarrow (3) : **NFA** M に対し、
 $L(M)$ を認識する **DFA** \widetilde{M} を構成

DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ に対し、

$L(M)$ を認識する決定性有限オートマトン

$\tilde{M} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ を構成

アイデア：

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？

DFA と NFA との同等性

非決定性有限オートマトン

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ に対し、

$L(M)$ を認識する決定性有限オートマトン

$\tilde{M} = (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$ を構成

アイデア：

非決定性モデルでも決定的に定まるものは何か？

定理

言語 L に対し、次は同値：

- (1) L : 正規言語
- (2) L が或る **NFA** で認識される
- (3) L が或る **DFA** で認識される

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 有限オートマトンによって
認識可能な言語はどのようなものか？
→ 正規言語
- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
A を認識する有限オートマトン M
が存在するか？

→

言語 A が

正規言語である (FA で認識される) かどうか、
の良い判定基準は？

集合・写像などの言葉を用いて記述する練習

演習問題 2: Σ を alphabet とする。以下を記述せよ。

(3) L : 言語

- (a) 文字 $a \in \Sigma$ に対し、語に左 (resp. 右) から文字 a を接続させる写像 l_a (resp. r_a)
- (b) 語 $w \in \Sigma^*$ に対し、語に左 (resp. 右) から文字列 w を接続させる写像 l_w (resp. r_w) (語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で)
- (c) 語 $w \in \Sigma^*$ の後に接続すると L の元になる語全体の成す集合 $S_L(w)$ を与える写像 S_L

(4) $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$: 有限オートマトン

- (a) 状態 $q \in Q$ にいる所から出発して語 $w \in \Sigma^*$ を読んだ後の状態 $\tilde{\delta}(q, w)$ を与える写像 $\tilde{\delta}$ (語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で)
- (b) 特に、 M が語 $w \in \Sigma^*$ を読んだ後の状態を与える写像 $\tilde{\delta}_0$
- (c) M が認識する言語 $L(M)$
- (d) 状態 $q \in Q$ にいる所から出発して、その後に読めば受理される語全体の成す集合 $\varphi_M(q)$ を与える写像 φ_M