有限オートマトンでの計算可能性問題

- **言語** $A \subset \Sigma^*$ **に対し、**
  A **を認識する有限オートマトン** M
  が存在するか？

- **有限オートマトンによって**
  認識可能な言語はどのようなものか？

定理：

L：**正規言語**

$\Updownarrow$

L **が或る有限オートマトンで認識される**

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

- 有限オートマトンによって
  認識可能な言語はどのようなものか？

$\longrightarrow$ 正規言語・正規表現

有限オートマトンで認識できないない言語が存在する !!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

有限オートマトンでの計算可能性問題

- 言語 $A \subset \Sigma^*$ に対し、
  A を認識する有限オートマトン M
  が存在するか？

$\longrightarrow$

言語 A が
正規言語である（FA で認識される）かどうか、
の良い判定基準は？

集合・写像などの言葉を用いて記述する練習

演習問題2：Σ を alphabet とする。以下を記述せよ。

(3) L：言語

(a) 文字 $a \in \Sigma$ に対し、語に左（resp. 右）から文字 a を連接させる写像 ℓ_a (resp. r_a)

(b) 語 $w \in \Sigma^*$ に対し、語に左（resp. 右）から文字列 w を連接させる写像 ℓ_w (resp. r_w)（語の長さ $|w|$ に関する帰納的定義で）

(c) 語 $w \in \Sigma^*$ の後に連接すると L の元になる語全体の成す集合 $S_L(w)$ を与える写像 S_L

(4) $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ **：有限オートマトン**

(a) **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態** $\widetilde{\delta}(q, w)$ **を与える写像** $\widetilde{\delta}$ **（語の長さ** $|w|$ **に関する帰納的定義で）**

(b) **特に、**M **が語** $w \in \Sigma^*$ **を読んだ後の状態を与える写像** $\widetilde{\delta}_0$

(c) M **が認識する言語** $L(M)$

(d) **状態** $q \in Q$ **にいる所から出発して、その後に読めば受理される語全体の成す集合** $\varphi_M(q)$ **を与える写像** φ_M

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$\iff$ **"待ち" が有限種類**

$$\begin{aligned} \ell_w : \Sigma^* &\longrightarrow \Sigma^* \\ v &\longmapsto wv \end{aligned}$$ **："左平行移動"**

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **に対し、**

$$\begin{aligned} S_L : \Sigma^* &\longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*) \\ w &\longmapsto \{v \in \Sigma^* \mid wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L) \end{aligned}$$ **："待ち" の集合**

$$\#\mathrm{Im} S_L < \infty \iff \exists M : L = L(M)$$

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できる

$\Longleftrightarrow$ **“待ち” が有限種類**

$$\begin{aligned} \ell_w : \Sigma^* &\longrightarrow \Sigma^* \\ v &\longmapsto wv \end{aligned}$$ **：“左平行移動”**

言語 $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ **に対し、**

$$\begin{aligned} S_L : \Sigma^* &\longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*) \\ w &\longmapsto \{v \in \Sigma^* \mid wv \in L\} = \ell_w^{-1}(L) \end{aligned}$$ **：“待ち” の集合**

$$\#\mathrm{Im} S_L < \infty \Longleftrightarrow \exists M : L = L(M)$$

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できないない言語が存在する !!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

例：$A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ （a と b との個数が同じ）
実際 $w_n = a^n b$ に対する $S_L(w_n)$ が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法
（の一種の pumping lemma）
を利用することが多い

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できないない言語が存在する !!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

例：$A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ **（**a **と** b **との個数が同じ）**
実際 $w_n = a^n b$ に対する $S_L(w_n)$ が全て異なる

一般には、証明には部屋割り論法
（の一種の pumping lemma）
を利用することが多い

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できない言語が存在する !!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

例：$A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ **（**a **と** b **との個数が同じ）**
実際 $w_n = a^n b$ **に対する** $S_L(w_n)$ **が全て異なる**

一般には、証明には部屋割り論法
（の一種の pumping lemma）
を利用することが多い

有限オートマトンでの計算可能性問題

有限オートマトンで認識できない言語が存在する!!
（$\Longleftrightarrow$ 正規でない言語が存在する）

例：$A = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ **（**a **と** b **との個数が同じ）**
実際 $w_n = a^n b$ **に対する** $S_L(w_n)$ **が全て異なる**

一般には、証明には部屋割り論法
（の一種の pumping lemma）
を利用することが多い

Pumping Lemma（注入補題・反復補題）

正規言語 $A \subset \Sigma^*$ **に対し、**

$\exists n \in \mathbb{N}:$

$\forall w \in A, |w| \geq n:$

$\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz$

(1) $y \neq \varepsilon$
(2) $|xy| \leq n$
(3) $\forall k \geq 0 : xy^k z \in A$