有限オートマトンで認識できない言語が存在する

$$\Downarrow$$

より強力な計算モデルが必要

$$\Downarrow$$

- **プッシュダウンオートマトン**
- **チューリングマシン**

定理：

L：正規言語

$\Updownarrow$

L が或る有限オートマトンで認識される

定理：

L：文脈自由言語

$\Updownarrow$

L が或るプッシュダウンオートマトンで認識される

本質的な違いは？

文脈自由言語は再帰 (recursion) を記述できる

正規言語・文脈自由言語と再帰

- 正規言語は繰返しを記述できる
- 文脈自由言語は再帰を記述できる
- 再帰の実装にはスタックを要す
- 文脈自由言語の生成規則は次の形に出来る
  - $\star$ $X \longrightarrow YZ \ (X, Y, Z \in V)$
  - $\star$ $X \longrightarrow x \ (X \in V, x \in \Sigma_\varepsilon)$

  (**Chomsky の標準形**)
- 正規言語の生成規則は次の形に出来る
  - $\star$ $X \longrightarrow xY \ (X, Y \in V, x \in \Sigma)$
  - $\star$ $X \longrightarrow x \ (X \in V, x \in \Sigma_\varepsilon)$

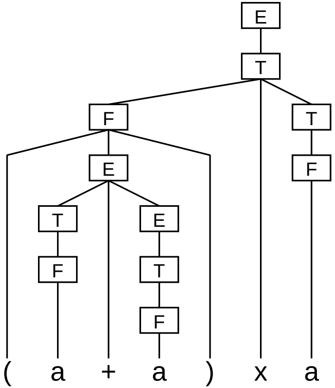
  特に、末尾再帰であり再帰の除去可能

構文解析木

生成規則の適用過程を木で表したもの

$G = (V, \Sigma, R, E)$

- $V = \{E, T, F\}$
- $\Sigma = \{a, +, \times, \ (,) \ \}$
- R :
  - $\star\ E \longrightarrow T \mid T + E$
  - $\star\ T \longrightarrow F \mid F \times T$
  - $\star\ F \longrightarrow a \mid (E)$



文脈自由言語の Pumping Lemma

文脈自由言語 A に対し、

$\exists n \in \mathbb{N}:$

$\forall w \in A, |w| \geq n:$

$\exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* : w = uvxyz$

(1) $vy \neq \varepsilon$ **(即ち** $v \neq \varepsilon$ **または** $y \neq \varepsilon$**)**

(2) $|vxy| \leq n$

(3) $\forall k \geq 0 : uv^k xy^k z \in A$

プッシュダウンオートマトンでは認識できない言語の例

同じ文字列 2 回の繰返しから成る文字列全体

$$A = \{ww | w \in \Sigma^*\}$$

入力を読み直せないのが弱点

$\longrightarrow$ **より強力な計算モデルが必要**

一つの方法としては、

入力を覚えておくために
プッシュダウンスタックをもう一つ
使えることにする

実際これで真により強い計算モデルが得られる

しかし、通常はこれと同等な
次のような計算モデルを考える
… チューリングマシン

一つの方法としては、

入力を覚えておくために
プッシュダウンスタックをもう一つ
使えることにする

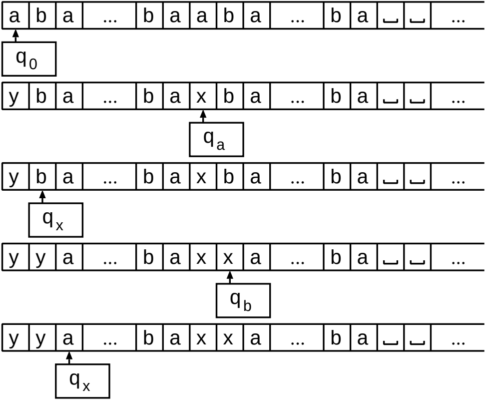
実際これで真により強い計算モデルが得られる

しかし、通常はこれと同等な
次のような計算モデルを考える
$\cdots$ チューリングマシン

チューリングマシン

- 有限個の内部状態を持つ
- 入力データはテープ上に一区画一文字づつ書き込まれて与えられる
- データを読み書きするヘッドがテープ上を動く
- 遷移関数は次の形：
  内部状態とヘッドが今いる場所の文字とによって、その場所の文字を書き換え、次の内部状態に移り、ヘッドを左か右かに動かす
- 受理状態または拒否状態に達したら停止するが、停止しないこともある

（非決定性）チューリングマシンによる言語 $A = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ の認識



チューリングマシンによる言語の認識

チューリングマシン T が言語 A を認識する

$$\Updownarrow$$

$$A = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{入力 } w \text{ に対し、} \\ \text{受理状態で停止する} \\ \text{遷移が存在} \end{array} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$w \in A \iff \begin{array}{l} \text{入力 } w \text{ に対し、} \\ \text{受理状態で停止する遷移が存在} \end{array}$$

チューリングマシンによる言語の判定

チューリングマシン T が言語 A を判定する

$$\Updownarrow$$

T **は** A **を認識し、**
かつ、全ての入力に対し必ず停止する

$$\Updownarrow$$

$w \in A \Longleftrightarrow$ **入力** w **に対し、受理状態で停止する遷移が存在**

かつ

$w \notin A \Longleftrightarrow$ **入力** w **に対し、すべての遷移が拒否状態で停止**

Church-Turing の提唱

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ）

… 「アルゴリズム」の定式化

Church-Turing の提唱

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ）

$\cdots$ 「アルゴリズム」の定式化

Church-Turing の提唱

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ）

$\cdots$ **「アルゴリズム」の定式化**

何故「チューリングマシン」なのか？

- **およそ計算機で実行したいことは模倣可能 （非有界のメモリにランダムアクセスできる計算機モデル）**

- **多少モデルを変更しても強さが同じ （モデルの頑強性）**
  - ⋆ テープが両方に無限に伸びているか
  - ⋆ ヘッドが動かないことがあっても良いか
  - ⋆ 複数テープチューリングマシン
  - ⋆ 決定性／非決定性　　　　などなど

プログラム内蔵方式（von Neumann 型）

$\cdots$ **プログラムもデータとして保持**

$\longrightarrow$ **一つの機械で様々な計算を柔軟に実現**

同様の働きをするチューリングマシンが構成できる

$\cdots$ **普遍チューリングマシン**

（万能チューリングマシン）

(universal Turing machine)

プログラム内蔵方式（von Neumann 型）

$\cdots$ プログラムもデータとして保持

$\longrightarrow$ 一つの機械で様々な計算を柔軟に実現

同様の働きをするチューリングマシンが構成できる

$\cdots$ 普遍チューリングマシン

（万能チューリングマシン）

(universal Turing machine)

プログラム内蔵方式（von Neumann 型）
$\cdots$ **プログラムもデータとして保持**
$\longrightarrow$ **一つの機械で様々な計算を柔軟に実現**

同様の働きをするチューリングマシンが構成できる

$\cdots$ **普遍チューリングマシン**
（万能チューリングマシン）
(universal Turing machine)

普遍チューリングマシン

全てのチューリングマシンの動作を模倣する

- **入力：**$(\langle M \rangle, w)$
  $\star$ $\langle M \rangle$**：機械** M **の符号化（プログラムに相当）**
  $\star$ w**：**M **に与える入力データ**

- **出力：機械** M **が入力** w **を受理するかどうか**

普遍チューリングマシン

普遍チューリングマシンとは、
言語

$$A_{\mathtt{TM}} = \left\{ (\langle M \rangle, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle M \rangle\text{：TM } M \text{ の符号化} \\ M \text{ が入力 } w \text{ を受理} \end{array} \right\}$$

を認識するチューリングマシン

普遍チューリングマシンが存在

$$\iff A_{\mathtt{TM}} \text{ がチューリングマシンで認識可能}$$

定理

言語

$$A_{\mathrm{TM}} = \left\{ (\langle M\rangle, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle M\rangle\text{：TM } M \text{ の符号化} \\ M \text{ が入力 } w \text{ を受理} \end{array} \right\}$$

は認識可能だが、判定可能ではない。

証明は一種の対角線論法による
（Russell のパラドックス風）

定理

言語

$$A_{\mathrm{TM}} = \left\{ (\langle M\rangle, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle M\rangle\text{：TM } M \text{ の符号化} \\ M \text{ が入力 } w \text{ を受理} \end{array} \right\}$$

は認識可能だが、判定可能ではない。

証明は一種の対角線論法による

（Russell のパラドックス風）

対角線論法の例：Russell のパラドックス

$X := \{A | A \notin A\}$ とせよ

$X \in X$ であるか？

- $X \in X$ と仮定すると、定義より $X \notin X$
- $X \notin X$ と仮定すると、定義より $X \in X$

$\longrightarrow$ どちらにしても矛盾 !!

対角線論法の例：Russell のパラドックス

$X := \{A | A \notin A\}$ **とせよ**

$X \in X$ **であるか？**

- $X \in X$ **と仮定すると、定義より** $X \notin X$
- $X \notin X$ **と仮定すると、定義より** $X \in X$

$\longrightarrow$ **どちらにしても矛盾 !!**

対角線論法の例：Russell のパラドックス

$X := \{A | A \notin A\}$ とせよ

$X \in X$ であるか？

- $X \in X$ と仮定すると、定義より $X \notin X$
- $X \notin X$ と仮定すると、定義より $X \in X$

$\longrightarrow$ どちらにしても矛盾 !!

対角線論法の例：Russell のパラドックス

$X := \{A | A \notin A\}$ **とせよ**

$X \in X$ **であるか？**

- $X \in X$ **と仮定すると、定義より** $X \notin X$
- $X \notin X$ **と仮定すると、定義より** $X \in X$

$\longrightarrow$ **どちらにしても矛盾 !!**

対角線論法の例：Russell のパラドックス

$X := \{A | A \notin A\}$ とせよ

$X \in X$ であるか？

- $X \in X$ と仮定すると、定義より $X \notin X$
- $X \notin X$ と仮定すると、定義より $X \in X$

$\longrightarrow$ どちらにしても矛盾 !!

$A_{\mathtt{TM}}$ の判定不可能性

$A_{\mathtt{TM}}$ を判定する TM $\mathbb{U}$ があったとする。

入力 $\langle \mathrm{M} \rangle$ に対し、

- **M が $\langle \mathrm{M} \rangle$ を受理するなら拒否**
- **M が $\langle \mathrm{M} \rangle$ を拒否するなら受理**

となる TM $\mathbb{D}$ が（$\mathbb{U}$ を使って）作れる。

これに、入力 $\langle \mathbb{D} \rangle$ を喰わせよ。

$A_{\mathtt{TM}}$ の判定不可能性

$A_{\mathtt{TM}}$ を判定する TM U があったとする。

入力 $\langle M \rangle$ に対し、

- M が $\langle M \rangle$ を受理するなら拒否
- M が $\langle M \rangle$ を拒否するなら受理

となる TM D が（U を使って）作れる。

これに、入力 $\langle D \rangle$ を喰わせよ。

$A_{\mathtt{TM}}$ の判定不可能性

$A_{\mathtt{TM}}$ を判定する TM $\mathbb{U}$ があったとする。

入力 $\langle \mathrm{M} \rangle$ に対し、

- M が $\langle \mathrm{M} \rangle$ を受理するなら拒否
- M が $\langle \mathrm{M} \rangle$ を拒否するなら受理

となる TM D が（$\mathbb{U}$ を使って）作れる。

これに、入力 $\langle \mathrm{D} \rangle$ を喰わせよ。