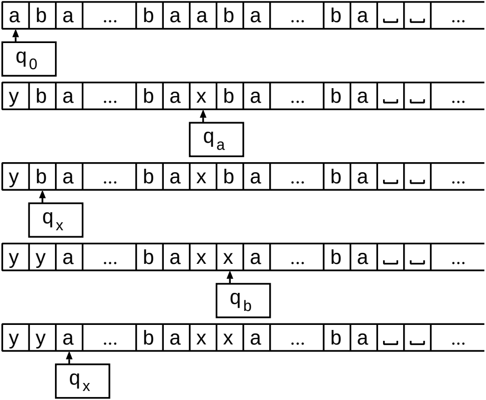
代表的な計算モデル

- **有限オートマトン（有限状態機械）**
- **プッシュダウンオートマトン**
- **チューリングマシン**

チューリングマシン

- 有限個の内部状態を持つ
- 入力データはテープ上に一区画一文字づつ書き込まれて与えられる
- データを読み書きするヘッドがテープ上を動く
- 遷移関数は次の形：
内部状態とヘッドが今いる場所の文字とによって、その場所の文字を書き換え、次の内部状態に移り、ヘッドを左か右かに動かす
- 受理状態または拒否状態に達したら停止するが、停止しないこともある

（非決定性）チューリングマシンによる 言語 $A = \{ww | w \in \Sigma^*\}$ の認識



チューリングマシンによる言語の認識

チューリングマシン T が言語 A を認識する

$$\Updownarrow$$

$$A = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{r} \text{入力 } w \text{ に対し、} \\ \text{受理状態で停止する} \\ \text{遷移が存在} \end{array} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$w \in A \iff \begin{array}{l} \text{入力 } w \text{ に対し、} \\ \text{受理状態で停止する遷移が存在} \end{array}$$

チューリングマシンによる言語の判定

チューリングマシン T が言語 A を判定する

$$\Updownarrow$$

T は A を認識し、
かつ、全ての入力に対し必ず停止する

$$\Updownarrow$$

$w \in A \iff$ 入力 w に対し、受理状態で停止する遷移が存在

かつ

$w \notin A \iff$ 入力 w に対し、すべての遷移が拒否状態で停止

Church-Turing の提唱

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ）

$\cdots$ **「アルゴリズム」の定式化**

何故「チューリングマシン」なのか？

- **およそ計算機で実行したいことは模倣可能
（非有界のメモリにランダムアクセスできる
計算機モデル）**

- **多少モデルを変更しても強さが同じ
（モデルの頑強性）**
  - ⋆ **テープが両方に無限に伸びているか**
  - ⋆ **ヘッドが動かないことがあっても良いか**
  - ⋆ **複数テープチューリングマシン**
  - ⋆ **決定性／非決定性　　　　などなど**

プログラム内蔵方式（von Neumann 型）

$\cdots$ **プログラムもデータとして保持**

$\longrightarrow$ **一つの機械で様々な計算を柔軟に実現**

同様の働きをするチューリングマシンが構成できる

$\cdots$ **普遍チューリングマシン**

（万能チューリングマシン）

(universal Turing machine)

普遍チューリングマシン

全てのチューリングマシンの動作を模倣する

- **入力：**$(\langle M \rangle, w)$
  $\star$ $\langle M \rangle$**：機械** M **の符号化（プログラムに相当）**
  $\star$ w**：**M **に与える入力データ**

- **出力：機械** M **が入力** w **を受理するかどうか**

普遍チューリングマシン

普遍チューリングマシンとは、
言語

$$A_{\mathtt{TM}} = \left\{ (\langle M \rangle, w) \,\middle|\, \begin{array}{l} \langle M \rangle\text{：TM } M \text{ の符号化} \\ M \text{ が入力 } w \text{ を受理} \end{array} \right\}$$

を認識するチューリングマシン

普遍チューリングマシンが存在

$$\iff A_{\mathtt{TM}} \text{ がチューリングマシンで認識可能}$$

定理

言語

$$A_{\mathrm{TM}} = \left\{ (\langle M \rangle, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle M \rangle\textbf{：TM } M \textbf{ の符号化} \\ M \textbf{ が入力 } w \textbf{ を受理} \end{array} \right\}$$

は認識可能だが、判定可能ではない。

証明は一種の対角線論法による

（Russell のパラドックス風）

対角線論法の例：Russell のパラドックス

$X := \{A | A \notin A\}$ とせよ

$X \in X$ であるか？

- $X \in X$ と仮定すると、定義より $X \notin X$
- $X \notin X$ と仮定すると、定義より $X \in X$

$\longrightarrow$ どちらにしても矛盾 !!

$A_{\mathtt{TM}}$ の判定不可能性

$A_{\mathtt{TM}}$ を判定する TM U があったとする。

入力 $\langle M \rangle$ に対し、

- M が $\langle M \rangle$ を受理するなら拒否
- M が $\langle M \rangle$ を拒否するなら受理

となる TM D が（U を使って）作れる。

これに、入力 $\langle D \rangle$ を喰わせよ。

対角線論法が出てきたついでに $\cdots$

対角線論法の例：冪集合の濃度

集合 X の冪集合 (power set)

$$\mathcal{P}(X) = \{S | S \subset X\}$$

について、

$$\#X \lneq \#\mathcal{P}(X)$$

集合の濃度

集合 A, B に対し、

$$A \prec B \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists\iota : A \longrightarrow B : \text{ 単射}$$

$$\Longleftrightarrow \exists\pi : B \longrightarrow A : \text{ 全射}$$

（$\Longleftarrow$ には選択公理が必要）

$$A \sim B \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists\varphi : A \longrightarrow B : \text{ 全単射}$$

$$\Longleftrightarrow A \prec B \text{ かつ } B \prec A$$

（Bernstein の定理）

$\sim$ は "集合全体の集まり" の上の "同値関係"

集合の濃度

A の属する“同値類”：A の**濃度 (cardinality)**

($\#A, |A|, \mathrm{card}(A)$ 等と書く)

- $\aleph_0 = \mathfrak{a} := \#\mathbb{N}$：**可算濃度**（可付番濃度）

  (countable, enumerable)
- $\aleph = \mathfrak{c} := \#\mathbb{R}$：**連続体濃度** (continuum)

濃度の比較：$\#A \leq \#B \stackrel{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} A \prec B$

- $\#A \leq \#A$
- $\#A \leq \#B, \#B \leq \#A \Longrightarrow \#A = \#B$
- $\#A \leq \#B, \#B \leq \#C \Longrightarrow \#A \leq \#C$

($\leq$ は濃度の間の“順序関係”である)

対角線論法の例：冪集合の濃度

集合 X の冪集合 (power set)

$$\mathcal{P}(X) = \{S | S \subset X\}$$

について、

$$\#X \lneq \#\mathcal{P}(X)$$

応用：

$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q} = \aleph_0$ **（可算濃度）だが、**
$\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \aleph \gneq \aleph_0$ **（連続体濃度）**

注：$\aleph$ は $\aleph_0$ の次の大きさ、とは言えない
（連続体仮説）

対角線論法の例：冪集合の濃度

集合 X の冪集合 (power set)

$$\mathcal{P}(X) = \{S | S \subset X\}$$

について、

$$\#X \lneq \#\mathcal{P}(X)$$

応用：

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q} = \aleph_0$$ **（可算濃度）だが、**

$$\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \aleph \gneq \aleph_0$$ **（連続体濃度）**

注：$\aleph$ は $\aleph_0$ の次の大きさ、とは言えない

（連続体仮説）

対角線論法の例：冪集合の濃度

集合 X の冪集合 (power set)

$$\mathcal{P}(X) = \{S | S \subset X\}$$

について、

$$\# X \lneq \# \mathcal{P}(X)$$

応用：

$\# \mathbb{N} = \# \mathbb{Q} = \aleph_0$ **（可算濃度）だが、**

$\# \mathbb{R} = \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \aleph \gneq \aleph_0$ **（連続体濃度）**

注：$\aleph$ は $\aleph_0$ の次の大きさ、とは言えない

（連続体仮説）

定理

チューリングマシンで認識可能でない言語が存在する。

- チューリングマシン全体の集合
- 言語全体の集合

の濃度とを比較せよ

定理

チューリングマシンで認識可能でない言語が存在する。

- **チューリングマシン全体の集合**
- **言語全体の集合**

の濃度とを比較せよ

さて、本講義最後の話題は、

計算量

について

問題の難しさを如何に計るか？

さて、本講義最後の話題は、

計算量

について

問題の難しさを如何に計るか？

Church-Turing の提唱（再掲）

「全てのアルゴリズム（計算手順）は、
チューリングマシンで実装できる」

（アルゴリズムと呼べるのは
チューリングマシンで実装できるものだけ）

$\cdots$ **「アルゴリズム」の定式化**