

授業アンケート実施「教員独自の設問」

- (1) 情報理工学科の他の科目との連携は
適切だったと思いますか
(5：独立し過ぎ ← 適切 → 重複し過ぎ：1)
- (2) 情報理工学科の学科専門科目として
適切な内容だったと思いますか
(5：専門的過ぎ ← 適切 → 概論的過ぎ：1)
- (3) 情報理工学科の教職課程（教科「数学」）の
コンピュータ区分の科目として
適切な内容だったと思いますか
(5：専門的過ぎ ← 適切 → 概論的過ぎ：1)

期末試験のお知らせ

7月30日（月）11:00 ~ 12:00
（60分試験）

1-105 教室（四谷キャンパス）

- 最終回(7/23)の講義内容まで
- 学生証必携

レポート提出について

- 期日：**8月6日（月）20時頃まで**
- 内容：
配布プリントのレポート問題の例のような内容
及び授業に関連する内容で、
授業内容の理解または発展的な取組みを
アピールできるようなもの
- 提出方法：
 - ★ 市谷本館1階106室前のメールポスト
 - ★ 電子メール

本講義最後の話題は、

計算量

について

問題の難しさを如何に計るか？

重要な難しさのクラス

多項式時間 $P \dots \exists k : O(n^k)$

- “事実上計算可能” な難しさ
- 計算モデルの変更に関して頑健
(複数テープ TM などに変更しても不変)

「しらみつぶし」が入ると大体 $O(2^n)$ 程度以上
(指数時間 $EXP \dots \exists k : O(2^{n^k})$)
“事実上計算不可能”

例：並べ替え (sorting)

多くの数値データを大きさの順に並べ替える操作

n 個のデータの比較は $\frac{n(n-1)}{2}$ 通り

→ 全ての組合せを比較しても $O(n^2)$ で済む筈

- 具体的なアルゴリズムは？
- もっと早くなる？ ($o(n^2)$ になる？)

例：並べ替え (sorting)

多くの数値データを大きさの順に並べ替える操作

n 個のデータの比較は $\frac{n(n-1)}{2}$ 通り

→ 全ての組合せを比較しても $O(n^2)$ で済む筈

- 具体的なアルゴリズムは？
- もっと早くなる？ ($O(n^2)$ になる？)

例：並べ替え (sorting)

多くの数値データを大きさの順に並べ替える操作

n 個のデータの比較は $\frac{n(n-1)}{2}$ 通り

→ 全ての組合せを比較しても $O(n^2)$ で済む筈

- 具体的なアルゴリズムは？
- もっと早くなる？ ($O(n^2)$ になる？)

並べ替えの例：バブルソート

- 端から順に、隣と比べて逆順なら入れ換える
(末尾が決まる)
- (末尾を除いて)これを繰り返す

比較回数： $\frac{n(n-1)}{2}$ 回 \longrightarrow 計算量 $O(n^2)$

並べ替えの例：バブルソート

- 端から順に、隣と比べて逆順なら入れ換える
(末尾が決まる)
- (末尾を除いて)これを繰り返す

比較回数： $\frac{n(n-1)}{2}$ 回 \longrightarrow 計算量 $O(n^2)$

並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする（分割統治）
- 両者を併せる

「それぞれをソート」の部分は再帰を用いる

計算量は？

並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする（分割統治）
- 両者を併せる

「それぞれをソート」の部分は再帰を用いる

計算量は？

並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする（分割統治）
- 両者を併せる

「それぞれをソート」の部分は再帰を用いる

計算量は？

並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする
- 両者を併せる → 計算量は $O(n)$

計算量を $f(n)$ とすると、

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$\longrightarrow f(n) = O(n \log n)$$

並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする
- 両者を併せる → 計算量は $O(n)$

計算量を $f(n)$ とすると、

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$\longrightarrow f(n) = O(n \log n)$$

並べ替えの例：マージソート

- 半分に分ける
- それぞれをソートする
- 両者を併せる → 計算量は $O(n)$

計算量を $f(n)$ とすると、

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$\longrightarrow f(n) = O(n \log n)$$

最悪計算量と平均計算量

計算量の理論では、入力データに対して

「どんな場合でも（最悪でも）これだけで出来る」

というのが計算量の定義（最悪計算量）だが、

実際に計算するには、ランダムなデータに対して

「平均的にはこれだけで出来る」

というのも重要である（平均計算量）

並べ替えの例：クイックソート

- 基準値 (pivot) を選ぶ
- それより大きい値と小さい値とに分ける
- それぞれをソートする (分割統治)

計算量は

- 最悪では $O(n^2)$ にしかない
- しかし平均では $O(n \log n)$ で、
多くの場合、実際にはその中でもかなり速い

並べ替えの例：クイックソート

- 基準値 (pivot) を選ぶ
- それより大きい値と小さい値とに分ける
- それぞれをソートする (分割統治)

計算量は

- 最悪では $O(n^2)$ にしかない
- しかし平均では $O(n \log n)$ で、
多くの場合、実際にはその中でもかなり速い

並べ替えの例：挿入ソート

実際に扱うデータはランダムとは限らない

ソート済みデータに変更があった場合など、
殆どソートされているデータに対して速い方法

- それまでのデータをソートしておく
- 次のデータを適切な場所に挿入する

最悪計算量は $O(n^2)$ だが、場合によっては使える

並べ替えの例：挿入ソート

実際に扱うデータはランダムとは限らない

ソート済みデータに変更があった場合など、
殆どソートされているデータに対して速い方法

- それまでのデータをソートしておく
- 次のデータを適切な場所に挿入する

最悪計算量は $O(n^2)$ だが、場合によっては使える

並べ替えの例：挿入ソート

実際に扱うデータはランダムとは限らない

ソート済みデータに変更があった場合など、
殆どソートされているデータに対して速い方法

- それまでのデータをソートしておく
- 次のデータを適切な場所に挿入する

最悪計算量は $O(n^2)$ だが、場合によっては使える

さて、

いよいよ、

非決定性計算量と "P vs NP" 問題へ

非決定性計算モデルでの計算量

計算量にも“非決定性”の概念がある

あてずっぽうを許して、

うまくいけばどの位で解けるか
= 答を知って、その検証にどの位かかるか

非決定性多項式時間 (NP) :

非決定性の計算モデルで多項式時間で解ける

例：素因数分解は NP

… 素因数を知っていれば割算するだけ

非決定性計算モデルでの計算量

計算量にも“非決定性”の概念がある

あてずっぽうを許して、

うまくいけばどの位で解けるか
= 答を知って、その検証にどの位かかるか

非決定性多項式時間 (NP) :

非決定性の計算モデルで多項式時間で解ける

例：素因数分解は NP

… 素因数を知っていれば割算するだけ

非決定性計算モデルでの計算量

計算量にも“非決定性”の概念がある

あてずっぽうを許して、

うまくいけばどの位で解けるか
= 答を知って、その検証にどの位かかるか

非決定性多項式時間 (NP) :

非決定性の計算モデルで多項式時間で解ける

例：素因数分解は **NP**

… 素因数を知っていれば割算するだけ

非決定性計算モデルでの計算量

$$P \subset NP \subset EXP$$

未解決問題 (P vs NP Problem)

$$P = NP$$

であるか否か？

“The Millennium Problems”

の 7 つの問題のうちの 1 つ
(賞金 \$1M)

非決定性計算モデルでの計算量

$$P \subset NP \subset EXP$$

未解決問題 (P vs NP Problem)

$$P = NP$$

であるか否か？

“The Millennium Problems”

の 7 つの問題のうちの 1 つ
(賞金 \$1M)

非決定性計算モデルでの計算量

$$P \subset NP \subset EXP$$

未解決問題 (P vs NP Problem)

$$P = NP$$

であるか否か？

“The Millennium Problems”

の 7 つの問題のうちの 1 つ
(賞金 \$1M)

参考 : The Millennium Problems

2000 年に Clay 数学研究所 (CMI) により
賞金 \$1M が懸けられた 7 つの問題

- Birch and Swinnerton-Dyer 予想
- Hodge 予想
- Navier-Stokes 方程式の解の存在と微分可能性
- P vs NP 予想
- Poincarè 予想 (Perelman により解決 (2003))
- Riemann 予想
- Yang-Mills 方程式と質量ギャップ問題

多項式時間帰着可能性

問題 B が問題 A に多項式時間帰着可能

$\iff \exists f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* :$

- f : 多項式時間で計算可能
(多項式時間で計算する TM が存在)
- $w \in B \iff f(w) \in A$

- 問題 B が問題 A に多項式時間帰着可能のとき、
 $A \in P \implies B \in P$

多項式時間帰着可能性

問題 **B** が問題 **A** に多項式時間帰着可能

$\iff \exists f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^* :$

- f : 多項式時間で計算可能
(多項式時間で計算する TM が存在)
- $w \in B \iff f(w) \in A$

- 問題 **B** が問題 **A** に多項式時間帰着可能のとき、
 $A \in P \implies B \in P$

NP 完全・NP 困難

- 問題 A が **NP 困難 (NP-hard)**
 \iff 全ての NP 問題 B が
問題 A に多項式時間帰着可能
- 問題 A が **NP 完全 (NP-complete)**
 \iff 問題 A が NP かつ NP 困難

或る NP 完全な問題 A が $P \iff P = NP$

NP 完全・NP 困難

- 問題 A が **NP 困難 (NP-hard)**
 \iff 全ての NP 問題 B が
問題 A に多項式時間帰着可能
- 問題 A が **NP 完全 (NP-complete)**
 \iff 問題 A が NP かつ NP 困難

或る NP 完全な問題 A が $P \iff P = NP$

充足可能性問題 (SAT)

NOT, OR, AND からなる論理式

$f(A_1, \dots, A_n)$ に対し、
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ となる変数 A_i の真理値の組
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$
が存在するか？

定理 (Cook-Levin)

SAT は NP 完全

充足可能性問題 (SAT)

NOT, OR, AND からなる論理式

$f(A_1, \dots, A_n)$ に対し、
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ となる変数 A_i の真理値の組
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$
が存在するか？

定理 (Cook-Levin)

SAT は NP 完全

論理和標準形

NOT, OR, AND からなる全ての論理式は
次の形で表せる :

$$f(A_1, \dots, A_n) = (X_{11} \wedge \dots \wedge X_{1t_1}) \\ \vee \dots \\ \vee (X_{s1} \wedge \dots \wedge X_{st_s})$$

(各 X_{ij} は A_k または $\neg A_k$)

... **論理和標準形** ・ **選言標準形**
(**disjunctive normal form, DNF**)

論理積標準形

NOT, OR, AND からなる全ての論理式は
次の形で表せる :

$$f(A_1, \dots, A_n) = (X_{11} \vee \dots \vee X_{1t_1}) \\ \wedge \dots \\ \wedge (X_{s1} \vee \dots \vee X_{st_s})$$

(各 X_{ij} は A_k または $\neg A_k$)

... 論理積標準形・連言標準形

(conjunctive normal form, CNF)

特に、 $\forall i : t_i = 3$ となる論理式 ... 3-CNF

3-充足可能性問題 (3-SAT)

3-CNF $f(A_1, \dots, A_n)$ に対し、
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ となる変数 A_i の真理値の組
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$
が存在するか？

定理

- SAT は 3-SAT に多項式時間帰着可能
- 従って、3-SAT も NP 完全

3-充足可能性問題 (3-SAT)

3-CNF $f(A_1, \dots, A_n)$ に対し、
 $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ となる変数 A_i の真理値の組
 $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$
が存在するか？

定理

- **SAT** は 3-SAT に多項式時間帰着可能
- 従って、3-SAT も NP 完全

他にも沢山の **NP 完全問題**が知られている

例えば、次のパズルの解の存在判定は全て **NP 完全**

- 数独
- カックロ
- ののぐらむ
- スリザーリンク
- ナンバーリンク
- ぬりかべ
- 美術館
- ましゅ
- 天体ショー
- フィルオミノ

など

おしまい