

## 1. 微分・積分の計算 (04/12)

次回演習までの答案の採点・添削・返却が難しいことと、答案(の文字および内容)を整理して適切に清書する練習を兼ねて、問題は一旦各自のノートに解き、その後に配布する答案用紙に清書して提出することとする。提出分の問題については次の回に補足解説をすることがあるが、その際は各自で自分が解いたノートの答案を参照せよ。提出した答案は授業時には返却しないので、返却希望者は別途申し出よ。

適当な場合に板書発表を促す。板書発表時は、学生番号・氏名を付記すること。授業参画の評価に含めるので、意欲的・積極的な参画を望む。

問 1-1. 関数  $f(x) = x^n \log x$  ( $n$  は自然数) に対し、

(1) 導関数  $f'(x)$  を計算せよ。

(2) 定積分によって定まる関数  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  を計算せよ。(ヒント: 部分積分)

(3)  $n = 0, 1, 2$  に対し、 $y = f(x)$  のグラフを描け。

問 1-2. 自然数  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対し、

$$I_n(x) := \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

とおく。

(1)  $I_0(x)$  を求めよ。

(2) 部分積分により、 $I_n(x)$  の満たす漸化式を求めよ。

(3)  $I_1(x), I_2(x), I_3(x)$  を求めよ。

(4)  $I_n(x)$  をうまく書き表してみよ。

問 1-3. 定積分  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) の値を求めよう。

(1)  $I_0, I_1$  を求めよ。

(2)  $\sin^n x$  の導関数を求めよ。

(3)  $\sin^n x = \sin x \sin^{n-1} x$  と見て部分積分することにより、 $I_n, I_{n-2}$  の関係式を求めよ。

(4)  $I_n$  を求めよ。

問 1-4.  $a$  を正の実数として、 $f(x) = e^{-ax} \sin x, g(x) = e^{-ax} \cos x$  とおく。定積分

$$I = \int_0^\pi f(x) dx, \quad J = \int_0^\pi g(x) dx$$

を、色々な方法で求めてみよう。

(1) (a)  $f(x), g(x)$  の導関数  $f'(x), g'(x)$  をそれぞれ求め、 $f(x), g(x)$  の線型和 ( $Af(x) + Bg(x)$  の形) で表せ。

(b)  $f(x)$  を  $f'(x), g'(x)$  の線型和で表すことにより、 $f(x)$  の原始関数を見い出して、 $I$  を求めよ。

(c) 同様にして  $J$  を求めよ。

(2) (a)  $I, J$  の定義式をそれぞれ部分積分することにより、 $I, J$  の間の関係式を 2 つ求めよ。

(b) それらを連立して  $I, J$  を求めよ。