2. 不等式による評価・関数の極限と連続性 (04/26)

前回（まで）の問題を授業開始前に板書してあれば、授業冒頭で添削・解説を行なう。板書発表時は、学生番号・氏名を付記すること。授業参画の評価に含める。意欲的・積極的な参画を望む。

授業では A を付した問題を例題として解説する。その後、他の問題に取り組むこと。授業終了時の提出課題は B を付した問題 $+\alpha$ である。問題は一旦各自のノートに解き、その後に配布する答案用紙に清書して提出することとする。興味と意欲があれば C,D を付した問題にも取り組んでみよ。中でも D を付した問題は力試し的な問題である。

2-1A. $|x| < 2, |y| < 3$ のとき、$|4x - y|$ を上から評価せよ。（すなわち、$|4x - y| < c$ となる（なるべく小さい）c は？）

2-2B. $|x - \alpha| < \varepsilon, |y - \beta| < \varepsilon$ のとき、

(1) $|(x + y) - (\alpha + \beta)|$ を、ε を用いて上から評価せよ。

(2) $|xy - \alpha\beta|$ を、$\alpha, \beta, \varepsilon$ を用いて上から評価せよ。

2-3A. 関数の収束の ε-δ 流の定義について、関数 f について、

(1) 「x が a に近付くとき $f(x)$ が α に収束する」すなわち「$x \longrightarrow a$ で $f(x) \longrightarrow \alpha$」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

(2) 上の否定命題、すなわち「『$x \longrightarrow a$ で $f(x) \longrightarrow \alpha$』でない」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

2-4B. 関数の連続性の ε-δ 流の定義について、

(1) 「関数 f が $x = a$ で連続である」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

(2) 「関数 f が $x = a$ で連続でない」ということを、論理記号を交えて記述せよ。

2-5A. （極限の一意性）関数 f が $x \longrightarrow a$ で $f(x) \longrightarrow \alpha$ かつ $f(x) \longrightarrow \beta$ ならば、$\alpha = \beta$ であることを示せ。（従って、f の $x \longrightarrow a$ での極限値が存在すれば一意であり、この一意に定まる値を $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ と書く。）

2-6B. 関数 $f(x) = x^2$ が、任意の実数 a に対して $x = a$ で連続であることを証明したい。

(1) 関数 f が $x = a$ で連続であることを示すには何を示せば良いか。論理記号を交えて記述せよ。

(2) そのことを証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall \varepsilon > 0$ を取る。
> $\delta = \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $|h| < \delta$ に対し、
>
> $\cdots$
> $|f(a + h) - f(a)| < \varepsilon$ を示す
> $\cdots$
>
> 従って、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となり、f は $x = a$ で連続。

2-7A. $\lim_{x \to a} f(x) = b, \lim_{x \to a} g(x) = c$ のとき、$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = b + c$ となることを示せ。

2-8B. 前問の状況で、$\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = b - c$ となることを示せ。

2-9C. 前問の状況で、$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = bc$ となることを示せ。

2-10C. 関数 f が $x = a$ で連続で、かつ $f(a) > 0$ であるとする。このとき、或る $\varepsilon > 0$ と $c > 0$ とが存在して、$|x - a| < \varepsilon$ のとき $f(x) > c > 0$ となることを示せ。

2-11D. 前問の状況で、$\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(a)}$ （即ち、$\dfrac{1}{f(x)}$ も $x = a$ で連続）となることを示せ。（ヒント：評価の中で前問を用いる。）

2-12C. 関数 f が $x = a$ で微分可能なら、$x = a$ で連続であることを示せ。

2-13D. 関数 f が $x = a$ で微分可能で、$f'(a) > 0$ のとき、或る $\delta > 0$ が存在して、$a < x < a + \delta$ ならば $f(x) > f(a)$、および $a - \delta < x < a$ ならば $f(x) < f(a)$ となる（$x = a$ で増加の状態にある）ことを示せ。