5-40A. $f(x) = e^x$ の形式的 Taylor 展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ が、任意の実数 $x \in \boldsymbol{R}$ に対して e^x に収束することを示せ。

5-41B. （4-28B 再掲）以前の授業の演習課題で、$\sin 1$ の近似値を Taylor 展開を利用して求めたが、その際は特に誤差評価を行わなかった。ここでは Taylor の定理による剰余項の評価を用いて、誤差の評価をしてみよう。

（必要なら、裏面にある $n!, 1/n!$ の表を利用せよ。）

$f(x) = \sin x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f;x)$ について、

(1) $|R_N(f;1)| < 10^{-7}$ となる（出来ればなるべく小さい）N を与えよ。

(2) $\sin 1$ の近似値を小数第 6 位まで求めよ。

(3) 誤差が 10^{-6} 以下であることを保証せよ。但し、各項の四捨五入による誤差（丸め誤差）・剰余項を無視したことによる誤差（打切誤差）の双方を考慮に入れよ。

（意欲のある人はもう一桁多く小数第 7 位まで求めてみよ。その場合、(1) に当たる部分はどうすれば良いか。）

5-42C. 次で定まる関数 f について考える：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

(1) $x > 0$ の範囲で、$f'(x)$ を求めよ。

(2) f が $x = 0$ で微分可能であることを示せ。（ヒント：左側微分係数は 0 である。右側微分係数を定義に従って計算し、存在して 0 になることを示せ。）

(3) $n = 1, 2, \ldots$ に対し、f は n 回微分可能で、

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} \times \left(\dfrac{1}{x} \text{ の多項式}\right) & (x > 0) \end{cases}$$

の形になることを示せ。特に $f^{(n)}(0) = 0$ となる。

(4) f の形式的 Taylor 展開は 0 である。特に f と一致しない。

5-43A. 次の値を（主値で）答えよ。

(1) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(2) $\arctan 1$

5-44B. 次の値を主値で答えよ。但し、主値の範囲は、それぞれ $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \arccos x \le \pi, -\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$ に取ることとする。

(1) $\arcsin \dfrac{1}{2}$　　(2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　(3) $\arctan(-\sqrt{3})$

5-45B. a を $0 < a < 1$ なる実数とするとき、$x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0, x \ge a$ で定まる領域の面積を求めよ。

5-46A. 次で定義される関数を、それぞれ双曲正弦 (hyperbolic sine)・双曲余弦 (hyperbolic cosine)・双曲正接 (hyperbolic tangent) という（総称して双曲線関数という）：

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(1) 次の関係式を満たすことを示せ。

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

(b) $(\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$

(2) $\sinh x$ の Taylor 展開を、一般項と総和記号 $\sum$ を用いて表せ。

5-47B. 双曲線関数について、

(1) $\cosh x$ の Taylor 展開を、一般項と総和記号 $\sum$ を用いて表せ。
(2) $\tanh x$ の Taylor 展開を、x^5 の項まで（意欲があればもっと）求めよ。
(3) 次の加法定理を導け：
  (a) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
  (b) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
(4) $\tanh(x+y)$ を $\tanh x, \tanh y$ で表せ。（tanh の加法定理）

5-48C. e^x の Taylor 展開において、形式的に x を ix（i は虚数単位、$i^2=-1$）と置き換えた級数を考え、これを e^{ix} と書くことにする。

(1) 形式的に計算して実部・虚部に分けると、$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の形になることを確かめよ。（複素数まで拡げて収束・極限等の定式化を整備することにより、この関係式は正当化され、「Euler の公式」と呼ばれる。詳しくは、「複素関数論」の授業などで扱う。）
(2) 次の関係式が成り立つ：

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \tan x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})}$$

(3) 上の関係式と指数法則とから、三角関数の加法定理を導け。

5-49A. $y = \arcsin x$ について、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ。従って、$\arcsin x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ である。

5-50B. 逆正弦関数 $\arcsin x$ について、

(1) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$ を求めよ。（ヒント：$\arcsin x = (x)' \arcsin x$ と見て部分積分）
(2) $\arcsin x$ の Taylor 展開を求めよ。（一般項を書くか、最初の何項かの係数を具体的に求めよ。）（ヒント：$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ を二項展開してから項別積分）

5-51C. 双曲正弦関数 $\sinh x$ の逆関数 $\operatorname{arcsinh} x$ や、双曲正接関数 $\tanh x$ の逆関数 $\operatorname{arctanh} x$ について、上 2 問と同様の考察により、それぞれの Taylor 展開を求めてみよ。

5-52C. 双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$ 上の点 P の座標は $(\cosh t, \sinh t)$ と書ける。C 上の第 1 象限の点 $P(\cosh t, \sinh t)$ に対し、C 上の点 $A(1,0)$ から P に至る C 上の弧を γ とするとき、線分 OA、線分 OP、γ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。（この結果を円 $x^2+y^2=1$ の場合と比べよ。）

n	$n!$	$1/n!$
0	1	1
1	1	1
2	2	0.5
3	6	0.166666666667
4	24	0.041666666667
5	120	0.008333333333
6	720	0.001388888889
7	5040	0.000198412698
8	40320	0.000024801587
9	362880	0.000002755732
10	3628800	0.000000275573
11	39916800	0.000000025052
12	479001600	0.000000002088
13	6227020800	0.000000000161
14	87178291200	0.000000000011