

6. 色々な積分の計算 (06/28)

6-53A. 非負整数  $m, n$  に対し、 $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$  を求めよ。

6-54B. 非負整数  $m, n$  に対し、 $\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx, \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx$  を求めよ。

6-55B. 有理関数

$$f(x) = \frac{7x^2 + 6x - 5}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 5)}$$

の不定積分を計算したい。

(1)  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+5}$  を満たす定数  $a, b, c, d$  を求めよ。

(2) それぞれの項の不定積分を計算して、 $\int f(x)dx$  を求めよ。

6-56C.  $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) が満たす漸化式を求めよう。(以下、 $I_n$  は不定積分なので、定数の差は気にしなくてよい。)

(1)  $1+x^2 = t$  と置換することにより、 $\int \frac{x}{(1+x^2)^n} dx$  を求めよ。

(2)  $\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = x \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}$  と見て部分積分することにより、 $I_n - I_{n+1}$  を  $I_n$  で表し、 $I_n, I_{n+1}$  の関係式を求めよ。

6-57B. 次の不定積分を求めよ。(変数変換する前の変数  $x$  で表すのが本来だが、面倒なら変数変換した後の変数で表した状態でも良い。)

(1)  $\int \frac{1}{1+\sqrt[5]{x+1}} dx$  (ヒント:  $t = \sqrt[5]{x+1}$  とおく。)

(2)  $\int \sqrt{1+x^2} dx$  (ヒント:  $x = \tan \theta$  とおくのが素直と思われるが、 $t = x + \sqrt{1+x^2}$  とおく手法もある。)

(3)  $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$  (ヒント: 有理関数の積分に帰着する変数変換はいろいろ考えられるが、ここでは  $x = \sin \theta$  とおくのが簡明か。)

6-58A. 次の極限は?

(1)  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

6-59B. 次の極限は?

(1)  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx$

(2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx$

6-60B. 次の極限は?

(1)  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-x} dx$

(2)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \log x dx$

((2)のヒント:  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$  を用いよ。)

6-61C.

$$I_k(M) := \int_0^M x^k e^{-x} dx$$

とおく。 $I_k(M)$  の  $k$  に関する漸化式を求め、極限  $\lim_{M \rightarrow +\infty} I_k(M)$  が収束することを、 $k$  に関する帰納法で示せ。また、極限值  $I_k := \lim_{M \rightarrow +\infty} I_k(M)$  に関する漸化式を求めよ。