7. 定積分の基礎づけ・広義積分の収束と発散 (07/12)

有界閉区間 $I=[a,b]$ で定義された有界な関数 f に対し、定積分 $\displaystyle\int_I f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ を次で定義する：

- 区間 I の分割 $\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ に対し、
  - ⋆ $I_i:=[x_{i-1},x_i]$：各小区間、$|I_i|:=x_i-x_{i-1}$：I_i の区間幅
  - ⋆ $\displaystyle m_i:=\inf_{x\in I_i}f(x),\quad M_i:=\sup_{x\in I_i}f(x)$ ：区間 I_i に於ける f の下限・上限
  - ⋆ $\displaystyle s_\Delta:=\sum_{i=1}^n m_i|I_i|,\quad S_\Delta:=\sum_{i=1}^n M_i|I_i|$ ：分割 Δ に関する上下からの見積もり
- $\displaystyle s:=\sup_\Delta s_\Delta$：下積分、$\displaystyle S:=\inf_\Delta S_\Delta$：上積分
- $s=S$ のとき、f は I で積分可能といい、$\displaystyle s=S=:\int_I f(x)dx$ と書く。

7-62A.　閉区間 $I=[0,2]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=1\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を考える。区間 I の分割 $\Delta: 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$ に対し、各 I_i は $f(x)=0$ となる点 $x\in I_i$ を含むので、$m_i=0$ であり、従って、$s_\Delta=0$ である。これより、下積分は $s=0$ である。一方、$x=1$ を含む小区間 $I_k=[x_{k-1},x_k]$ については、$M_k=1>0$ であり、従って、$S_\Delta=|I_k|>0$ である。f が I で積分可能であることを言うには、上積分 $S=0$ であること、即ち、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 Δ が存在することを言わなくてはならない。

与えられた任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 $\Delta=\Delta_\varepsilon$ を実際に与えることによって、このことを示せ。

7-63B.　$I=[0,3]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=1\text{ のとき})\\ 2 & (x=2\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

を考える。上問と同様に、与えられた任意の $\varepsilon>0$ に対し、$S_\Delta\le\varepsilon$ なる分割 $\Delta=\Delta_\varepsilon$ を具体的に与えることによって、f が I で積分可能であることを示せ。

7-64C.　m を 1 以上の整数とする。$I=[0,1]$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & \left(x=\dfrac{k}{m}\ (k=1,2,\ldots,m-1)\text{ のとき}\right)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

について、上問と同様にして、f が I で積分可能であることを示せ。

7-65D.　閉区間 $I=[0,1]$ の部分集合 $T\subset I$ に対し、I 上で定義された特性関数 φ_T を次で定める：

$$\varphi_T(x)=\begin{cases}1 & (x\in T\text{ のとき})\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases}$$

次の T について、その特性関数 φ_T は I で積分可能であるか？

(1) $T=\left[0,\dfrac{1}{2}\right)=\left\{x\in\boldsymbol{R}\,\middle|\,0\le x<\dfrac{1}{2}\right\}$

(2) $T=I\cap\boldsymbol{Q}$ （$\boldsymbol{Q}$ は有理数全体の集合）

(3) $T=\left\{\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n\text{：正整数}\right\}$

(4) $T=\{x\in I\,|\,x\text{ の三進小数展開に 1 が現れない}\}$

7-66A. $a<c<b$ とし、閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 f について、f は $[a,b]$ で有界であるとする。従って、$[a,c],[c,b]$ でも有界であり、それぞれの区間における下積分が存在する。区間を明示して、$[a,b]$ (resp. $[a,c],[c,b]$) における f の下積分を $s(a,b)$ (resp. $s(a,c),s(c,b)$) と書くことにする。$s(a,b)=s(a,c)+s(c,b)$ であることを示したい。それには、$s(a,b)$ の定義により、$s(a,c)+s(c,b)$ が $X:=\{s_\Delta|\Delta：[a,b]$ の分割$\}$ の上限（最小上界）であることを示せば良い。

(1) $s(a,c)+s(c,b)$ が X の上界であること、即ち、$[a,b]$ の任意の分割 Δ に対し、$s(a,c)+s(c,b)\geq s_\Delta$ であることを示せ。（ヒント：必要なら c を分点に加えた分割 $\widetilde{\Delta}$ を考え、それが定める $[a,c],[c,b]$ の分割をそれぞれ Δ_1,Δ_2 とする。$s_{\Delta_1}+s_{\Delta_2}=s_{\widetilde{\Delta}}\geq s_\Delta$ であることと、$s(a,c),s(c,b)$ の上界性を用いよ。）

(2) $s(a,c)+s(c,b)$ が X の上界のうち最小であること、即ち、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$s(a,c)+s(c,b)-\varepsilon$ が X の上界でないことを示せ。（ヒント：$[a,b]$ の分割 Δ で $s_\Delta>s(a,c)+s(c,b)-\varepsilon$ となるものの存在を示す。$s(a,c),s(c,b)$ の上界としての最小性を用いよ。）

7-67B. 上問の状況で、同様にして、上積分についての等式 $S(a,b)=S(a,c)+S(c,b)$ であることを示せ。即ち、$Y:=\{S_\Delta|\Delta：[a,b]$ の分割$\}$ とするとき、

(1) $S(a,c)+S(c,b)$ が Y の下界であることを示せ。

(2) $S(a,c)+S(c,b)$ が Y の下界のうち最大であることを示せ。

7-68C. 上 2 問を用いて、f が $[a,c],[c,b]$ で共に積分可能であることと、f が $[a,b]$ で積分可能であることとが同値であることを示せ。

以下の問題では、微分積分学の基本定理を用いて、「不定積分 = 原始関数」「定積分 = 原始関数の区間両端での値の差」として（即ち、今までに馴染みの計算法に従って）考えて良い。

7-69A. （前回の再掲）次の極限は？

(1) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}}dx$　(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}dx$　(4) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}dx$

(5) $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-x}dx$　(6) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x\,dx$

7-70B. 次の広義積分の収束・発散を判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx$　(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{2018}}{e^x}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x+2018}{x\sqrt{x}}dx$　(5) $\displaystyle\int_0^1\frac{x+2018}{x\sqrt{x}}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$

（結果のみでも良いが、その場合は、次の例のような広義積分のうち、どのような広義積分と収束・発散を共にするとして判定したかを明記せよ。

例：$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx,\quad \int\frac{1}{x}dx,\quad \int\frac{1}{x\sqrt{x}}dx,\quad \int\frac{1}{x^2}dx,\quad \int\frac{1}{x^3}dx,\quad \int\frac{1}{e^x}dx$　など）

7-71C. 広義積分 $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\log x}dx$ の収束・発散を判定せよ。

7-72C. $a>1$ に対し、広義積分 $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\log x)^a}dx$ の収束・発散を判定せよ。

7-73B. 次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。（いろいろ試みよ。）

(1) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-4x}{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x-4x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$