8. 補足課題 (07/12)

8-74C. 「数学 BI」の講義で紹介した定積分の定式化に従って、次のような定積分の基本的性質を示そう。$I=[a,b]$ を有界閉区間、f,g は I で定義された有界な関数とする。

(1) f,g がともに積分可能で、$\forall x\in I: f(x)\le g(x)$ ならば、$\displaystyle\int_I f(x)dx \le \int_I g(x)dx$

(2) f と g との和 $f+g$ を $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$ で、$c\in\boldsymbol{R}$ に対し、スカラー倍 cf を $(cf)(x):=cf(x)$ で、それぞれ定める。f,g がともに積分可能ならば、$f+g, cf$ も積分可能で、

$$\int_I (f+g)(x)dx=\int_I f(x)dx+\int_I g(x)dx, \qquad \int_I (cf)(x)dx = c\int_I f(x)dx$$

8-75C. $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{1-\cos x}$ について、積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を考える。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ は、有限な値 c を持つ。（ヒント：Taylor 展開を用いよ。）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ である。（従って、I は $x=0$ の所で広義積分。）

(3) さて、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=c$ とは、$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:0<|x|<\delta\Rightarrow c-\varepsilon<\dfrac{x^2}{1-\cos x}<c+\varepsilon$ ということである。このことから、$f(x)=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\ (x\to+0)$ である。

(4) 従って、比較判定法により広義積分 I は収束する。

（実際に暗算で判断する場合には、$x=0$ の近くで $1-\cos x$ は大体 x^2 の定数倍くらいなので、$f(x)$ は $x^{-\frac{1}{2}}$ の定数倍くらい、というようなことで良い。）

8-76C. $y=\arctan x=\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ について、定積分 $I(a)=\displaystyle\int_0^a \arctan x dx\ (a>0)$ を次の 2 通りで求めてみよう。

(1) $\arctan x=(x)'\arctan x$ と見て部分積分して求めよ。

(2) 長方形領域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a, 0\le y\le\arctan a\}$ は $y=\arctan x$ のグラフによって 2 つの領域に分かれる。この各領域の面積を考えることによって求めよ。

8-77C. Γ 関数（ガンマ関数）・B 関数（ベータ関数）

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\frac{dx}{x}, \qquad \mathrm{B}(s,t)=\int_0^1 x^s(1-x)^t\frac{dx}{x(1-x)}$$

に関する諸性質の導出に際しては、多変数関数の微分積分に関する性質を利用するものも多く、「数学 BI（微分積分）」で扱う範囲を超えるが、関係式 $\Gamma(s)\Gamma(t)=\mathrm{B}(s,t)\Gamma(s+t)$ は重要なので、「数学 BII（多変数微積）」で扱う事項も或る程度踏まえて触れておく。

(1) $\Gamma(s)=2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2}y^{2s-1}dy$ （ヒント：$x=y^2$ とおく。）

(2) $\mathrm{B}(s,t)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s-1}\theta\cos^{2t-1}\theta\, d\theta$ （ヒント：$x=\sin^2\theta$ とおく。ここまでは「数学 BI（微分積分）」の範囲内）

(3) $\Gamma(s)\Gamma(t)=\left(2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2s-1}dy\right)\left(2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2}y^{2t-1}dy\right)$ と見て、極座標変換 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ により、$\Gamma(s)\Gamma(t)=\mathrm{B}(s,t)\Gamma(s+t)$ を導け。

(4) これより、$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。また $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ。（e^{-x^2} の不定積分は初等関数では書き表せないが、$[0,+\infty)$ における定積分（広義積分）の値については、このように判る。統計でデータやその誤差の分布を扱うときに現れる積分で、詳しくは多分「数学 CI（統計データ解析）」「数学 CII（確率統計）」その他データの通信などを扱う講義で触れられるであろう。乞うご期待。）

8-78C.　調和級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ の発散について、精しく見てみよう。

(1) 積分 $\displaystyle\int_{N}^{N+1}\frac{1}{x}dx$ と比較することにより、$\displaystyle\frac{1}{N+1}<\log(N+1)-\log N<\frac{1}{N}$ であることを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>\log(N+1)>\log N$ であることを示せ。これより、

$\displaystyle\gamma_N:=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N,\gamma'_N:=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N+1)$ とおくと、$\gamma_N>\gamma'_N>0$ である。

(3) 数列 (γ_N) が単調減少であること、数列 (γ'_N) が単調増加であること、および、$\gamma_N-\gamma'_N\longrightarrow 0$ であることを示せ。

(4) 従って、数列 $(\gamma_N),(\gamma'_N)$ は同じ値に収束する。（この値を Euler の定数といい、γ と書く。）$0.5<\gamma<1$ であることを示せ。

注：γ の近似値は $\gamma=0.57721\cdots$ であるが、この値が有理数であるかどうかは知られていない（未解決問題）。

8-79C.　絶対収束する級数 $\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の和の近似値の計算について考える。部分和を $\displaystyle S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ とおき、S との差を $\displaystyle R_N:=S-S_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ とする。

(1) 積分 $\displaystyle\int_{N}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ などと比較することにより、R_N の評価 $\displaystyle\frac{1}{N+1}<R_n<\frac{1}{N}$ を得よ。（従って、S_N を S の値の近似値とする場合、例えば $N=10^6$ まで計算しても、誤差 R_N は 10^{-6} 程度残ることになる。）

(2) 絶対収束する級数 $\displaystyle T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ を考える。この級数の和 T の値を求めよ。

（ヒント：$\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}$ の部分分数分解を利用。）

(3) S,T ともに絶対収束するので、和の順番を入れ替えても値は変わらず、$\displaystyle S':=S-T=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ が成り立つ。この級数の部分和 $\displaystyle S'_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)}$ を計算して S' の近似値としよう。このときの差 $R'_N:=S'-S'_N$ を積分 $\displaystyle\int_{N}^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)}dx$ などと比較することにより、R'_N の評価を得よ。この評価から、$T+S'_N$ を S の値の近似値とする場合、誤差 R'_N を 10^{-6} 程度に収まるには N をどの程度にすればよいか考察せよ。

(4) 補助の級数 T の代わりにもっと良い近似が得られ（て値が計算でき）る級数を利用したり、和 S' について更に同様のことを続けたりして、この方法を改良し、更に少ない項の計算で良い近似値が得られるよう工夫してみよ。（このように収束の遅い級数を収束の速い級数に変換することにより、少ない計算で精度の高い近似値を計算する方法を加速法と呼ぶ。定積分の値の数値計算は応用上重要であり、古くから様々な手法が研究されている。）