1. 不等式・ε-δ 論法

1–1. **不等式の基本性質.**

- $x \le y, y \le z \Longrightarrow x \le z$ ：**推移律 (transitive law)**
- $x \le y, y \le x \Longrightarrow x = y$ ：**反対称律 (anti-symmetric law)**
- 演算との関係：
  - $\star\ x \le y \Longrightarrow x + a \le y + a$
  - $\star\ a > 0, x \le y \Longrightarrow ax \le ay$
- $|x + y| \le |x| + |y|$ ：**三角不等式 (triangle inequality)**

1–2. ε-δ **式の極限の定式化.**

- 関数 f に対し、$x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow b$
  （$f(x)$ が b に**収束 (converge)** する, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b$）
  $\stackrel{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x \in \boldsymbol{R} : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
- 関数 f が $x = a$ で**連続 (continuous)** $\stackrel{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
  $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x \in \boldsymbol{R} : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

1–3. **演習問題.**

(1) 関数 $f(x) = x^2$ について、f が $x = -4$ で連続であることを、（ε-δ 流で）証明したい。
  (a) 何を示せば良いか。論理記号を交えた数式で記述せよ。
  (b) そのことを証明せよ。

(2) 関数 $f(x) = x^3$ について、任意の実数 a に対し、f が $x = a$ で連続であることを、
  (a) （ε-δ 流に）論理記号を交えた数式で記述せよ。
  (b) 証明せよ。

1–4. **練習問題.**

(1) 関数 $f(x) = x^2$ が、任意の実数 a に対して $x = a$ で連続であることを証明したい。
  (a) 関数 f が $x = a$ で連続であることを示すには何を示せば良いか。論理記号を交えた数式で記述せよ。
  (b) そのことを証明せよ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall\varepsilon > 0$ を取る。
> $\delta = \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $0 < |h| < \delta$ に対し、
>
> > $\cdots$
> > $|f(a + h) - f(a)| < \varepsilon$ を示す
> > $\cdots$
>
> 従って、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となり、f は $x = a$ で連続。

(2) 「関数 f が $x = a$ で連続でない」ということを、論理記号を交えた数式で記述せよ。

(3) $x \ne 0$ に対して $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ で定義される関数 f について、$x \longrightarrow 0$ のとき $f(x) \longrightarrow 0$ (即ち $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$) であることを証明せよ。

(4) $a, c \in \boldsymbol{R}, c > 0$ とする。関数 f が $x = a$ で連続であるとき、$g(x) := cf(x)$ で定義される関数 g もまた $x = a$ で連続であることを証明したい。
  (a) 関数 g が $x = a$ で連続であることを示すには何を示せば良いか。論理記号を交えた数式で記述せよ。
  (b) そのことを証明せよ。($c > 0$ の仮定はもちろん不要であるので、出来ればこの仮定がなくても通用する形で証明を書いてみよ。)

(5) 関数 f が $x = a$ で連続であり、$f(a) > 0$ であるとき、或る $\delta > 0$ に対し、$|x - a| < \delta$ ならば $f(x) > 0$ となることを証明せよ。(「a の充分近くでは $f(x) > 0$」のようにも言う。)

2. Taylor 展開の例

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \quad (|x| < 1)$$