

5. 指数関数とその仲間たち

5-1. 逆三角関数. 三角関数を単調な区間に制限して逆関数を考えたものを逆三角関数という:

- $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の逆関数 $y = \arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$): 主値
(しばしば $\text{Arcsin } x, \sin^{-1} x$ 等とも書かれる)
- $y = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) の逆関数 $y = \arctan x$ ($-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$): 主値
(しばしば $\text{Arctan } x, \tan^{-1} x$ 等とも書かれる)
- 積分表示: $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \arctan x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- Taylor 展開:
 - ★ $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots \quad (|x| < 1)$
 - ★ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \quad (|x| < 1)$

5-2. Euler の公式.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

- $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$
- de Moivre の公式: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$
- 複素数の極形式: $\alpha = a + bi = re^{i\theta}$
 - ★ $r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$: α の絶対値 (absolute value)
 - ★ $\theta = \arg \alpha$: α の偏角 (argument), $r \cos \theta = a, r \sin \theta = b$

5-3. 双曲線関数. 次で定義される関数を、総称して双曲線関数という:

- $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$: 双曲余弦 (hyperbolic cosine)
- $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$: 双曲正弦 (hyperbolic sine)
- $\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$: 双曲正接 (hyperbolic tangent)

三角関数と類似の公式が多く成立

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x$
- 加法定理:
 - ★ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
 - ★ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
 - ★ $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
- Taylor 展開:
 - ★ $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \dots$
 - ★ $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \dots$

5-4. 練習問題.

- (1) 次の値を主値で答えよ。但し、主値の範囲は、それぞれ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ に取ることとする。
- (a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$
- (2) a を $|a| < 1$ なる実数とすると、 $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq a$ で定まる領域の面積を求めよ。
- (3) $\tanh x$ の Taylor 展開を、 x^7 の項まで (意欲があればもっと) 求めよ。
- (4) 次の手順で $y = \arcsin x$ の Taylor 展開を求めよ。
 (a) $x = \sin y$ の満たす微分方程式を求める。
 (b) $\arcsin x$ を積分で表す。
 (c) 被積分関数を Taylor 展開して項別積分する。
- (5) 上と同様にして、 $\arctan x, \operatorname{arcsinh} x, \operatorname{arctanh} x$ などの Taylor 展開を求めてみよ。
- (6) $\int \arcsin x \, dx$ を求めよ。(ヒント: $\arcsin x = (x)' \arcsin x$ と見て部分積分。上問の中で $\arcsin x$ の微分が分かっていることに注意。)
- (7) 同様に、 $\arctan x, \operatorname{arcsinh} x, \operatorname{arctanh} x$ などの不定積分を求めてみよ。
- (8) 双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ 上の点 P の座標は $(\cosh t, \sinh t)$ と書ける。 C 上の第 1 象限の点 $P(\cosh t, \sinh t)$ に対し、 C 上の点 $A(1, 0)$ から P に至る C 上の弧を γ とするとき、線分 OA 、線分 OP 、 γ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。(この結果を円 $x^2 + y^2 = 1$ の場合と比べよ。)

5-5. 複素指数関数および複素数の極形式に関する練習問題. 複素数の極形式や複素数を定義域とする関数については、基本的には本授業の範囲外であるが、補足的にいくつか挙げておく。詳しくは 2 年次の「複素関数論」の授業などで扱う。複素数を用いて指数関数・三角関数を統一的に扱うことは、電磁気学や波の記述に関して便利 (必須) であり、引き続き「フーリエ・ラプラス解析」と併せて履修されたい。

- (1) e^x の Taylor 展開において、形式的に x を ix (i は虚数単位、 $i^2 = -1$) と置き換えた級数を考え、これを e^{ix} と書くことにする。
 (a) 形式的に計算して実部・虚部に分けると、 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の形になることを確かめよ。(複素数まで拡げて収束・極限等の定式化を整備することにより、この関係式は正当化される。)
 (b) 次の関係式が成り立つ：

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

 (c) 上の関係式と指数法則とから、三角関数の加法定理を導け。
- (2) 極形式で表示された次の複素数を実部・虚部で表示せよ。
 (a) $e^{\frac{\pi i}{6}} = \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)$ (b) $2e^{-\frac{\pi i}{4}} = 2 \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)$ (c) $e^{\frac{2\pi i}{5}} = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$
- (3) 実部・虚部で表示された次の複素数を極形式で表示せよ。
 (a) i (b) $2 + 2i$ (c) $\sqrt{3} + i$
- (4) $(1 + \sqrt{3}i)^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。(ヒント: 直接計算でも良いが、極形式表示も有効。)
- (5) \sqrt{i} (即ち、 $x^2 = i$ の解) を求めよ。