6. 一変数関数の積分

6–1. 定積分の定義. 関数 $y = f(x)$ が有界閉区間 $[a,b] = \{x|a \le x \le b\}$ で有界とする。

- $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$：区間 $[a,b]$ の**分割**
  $I_i := [x_{i-1}, x_i]$：各小区間 $(i = 1,\ldots,n)$、$|I_i| := x_i - x_{i-1}$：小区間 I_i の区間幅
  小区間の最大幅 $\max\limits_{1\le i\le n} |I_i|$ を $|\Delta|, \delta(\Delta)$ 等と書く。
- $m_i := \inf\limits_{x\in I_i} f(x),\ M_i := \sup\limits_{x\in I_i} f(x)$: 各小区間 I_i での関数値 $f(x)$ の下限・上限
- $s_\Delta := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i |I_i|, \quad S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} M_i |I_i|$
- $s := \sup\limits_{\Delta} s_\Delta,\ S := \inf\limits_{\Delta} S_\Delta$: f の $[a,b]$ での**下積分・上積分**
- f が $[a,b]$ で**積分可能** $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} s = S$
  この時、$s = S =: \displaystyle\int_a^b f(x)dx$：$f$ の $[a,b]$ での**定積分**
- (**Darboux の定理**) $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$：分割の列で、$|\Delta_n| \to 0$ とする。この時、
  $s_{\Delta_n} \to s, S_{\Delta_n} \to S\ (n \to \infty)$。
- 定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る：
  $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I \iff \forall\varepsilon > 0 : \exists\Delta = \Delta_\varepsilon$：$[a,b]$ の分割 : $I - \varepsilon \le s_\Delta, S_\Delta \le I + \varepsilon$
- 次の Riemann 和を用いて定式化することもある：
  - ⋆ $\Xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$：各小区間から代表点を 1 つづつ選んだもの $(\xi_i \in I_i)$
    $I(\Delta,\Xi) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ ：**Riemann 和**
  - ⋆ f が $[a,b]$ で積分可能 $\iff \exists \lim\limits_{|\Delta|\to 0} I(\Delta,\Xi)$。この時、$\lim\limits_{|\Delta|\to 0} I(\Delta,\Xi) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

6–2. 積分の基本性質.

- 区間に関する加法性：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- 線型性：$\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- 単調性：$[a,b]$ で $f(x) \le g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

6–3. 不定積分. 定積分関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\displaystyle\int f(x)dx$ と書く。$\cdots$ **不定積分**

6–4. 微分積分学の基本定理. f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

即ち、**不定積分** = **原始関数**（微分すると f になる関数）。$\cdots$ 微分法と積分法との邂逅 !!
又、F を f の原始関数（の一つ）とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)\left(= \Big[F(x)\Big]_a^b \text{ と書く}\right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
足立恒雄「類体論へ至る道」より

7. 広義積分（変格積分）

7–1. **広義積分（変格積分）**. 積分区間又は非積分関数が有界でない場合。
下記の右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f：区間 $[a,b)$（resp. $(a,b]$） の上端 b（resp. 下端 a）の近くで有界でない場合
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$
- f：区間 $[a,+\infty)$（resp. $(-\infty,b]$）で定義されている場合
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_a^{M} f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{b} f(x)dx$$
- f：区間 $[a,b]$ の内点 c の近くで有界でない場合
$\longrightarrow$ 積分区間を $[a,c),(c,b]$ に分けて、それぞれ考えよ。
- f：積分区間の両端 a,b で広義積分の場合（a,b の近くで有界でないか、$a,b=\pm\infty$）
$\longrightarrow$ 適当な点 c で積分区間を $(a,c],[c,b)$ に分けて、それぞれ考えよ。
- 典型的な例：
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases} \alpha>1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha\le 1 \Rightarrow \text{発散}, \end{cases} \qquad \int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx : \begin{cases} \alpha<1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha\ge 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}$$
- 比較判定法 (簡単な場合)：
$$\star\ \exists\varepsilon>0 : f(x)=O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)(x\to+\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx\ \text{：収束}$$
$$\star\ \exists\varepsilon>0 : f(x)=O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right)(x\to+0) \Rightarrow \int_0^{1} f(x)dx\ \text{：収束}$$

7–2. Γ **関数・**B **関数.**

- $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^s\frac{dx}{x}$ ：Γ **関数** (広義積分は $s>0$ で収束)
- $\mathrm{B}(s,t)=\displaystyle\int_0^{1} x^s(1-x)^t\frac{dx}{x(1-x)}$ ：B **関数** (広義積分は $s>0, t>0$ で収束)
- $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s), \quad \Gamma(n+1)=n!, \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}, \quad \mathrm{B}(s,t)=\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

7–3. **練習問題.**

(1) $0<\alpha<1<\beta$ かつ $\alpha\beta=1$ とする。広義積分
$$I=\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx, \qquad J=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\beta}dx$$
をそれぞれ求めた上で比較し、それをグラフの下の面積という観点から解釈せよ。

(2) a,b を正の実数として、広義積分
$$I=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx, \qquad J=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$$
を、色々な方法で求めてみよう。

(a) 部分積分して I,J の間の関係式を 2 つ求め、それらを連立して I,J を求めよ。
（2 回部分積分してそれぞれが満たす関係式を得る方法と、実質的には同じ。）

(b) 形式的に $K=I+iJ$ とおくと、Euler の公式により、
$$K=\int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x}dx$$
となる。複素数 $\alpha=-a+bi\in\boldsymbol{C}$ に対しても、$(e^{\alpha x})'=\alpha e^{\alpha x}$ となると考えて、広義積分 K の値を求め、その実部・虚部として I,J を得よ。（この考えは、複素数の指数関数や複素数値関数の微分積分をしかるべく定式化することにより正当化される。詳しくは複素関数論で。）