

6. 一変数関数の積分

6-1. 定積分の定義. 関数 $y = f(x)$ が有界閉区間 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ で有界とする.

- $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$: 区間 $[a, b]$ の分割
 $I_i := [x_{i-1}, x_i]$: 各小区間 ($i = 1, \dots, n$), $|I_i| := x_i - x_{i-1}$: 小区間 I_i の区間幅
 小区間の最大幅 $\max_{1 \leq i \leq n} |I_i|$ を $|\Delta|, \delta(\Delta)$ 等と書く。

- $m_i := \inf_{x \in I_i} f(x), M_i := \sup_{x \in I_i} f(x)$: 各小区間 I_i での関数値 $f(x)$ の下限・上限

- $s_\Delta := \sum_{i=1}^n m_i |I_i|, S_\Delta := \sum_{i=1}^n M_i |I_i|$

- $s := \sup_{\Delta} s_\Delta, S := \inf_{\Delta} S_\Delta$: f の $[a, b]$ での下積分・上積分

- f が $[a, b]$ で積分可能 $\iff s = S$

この時、 $s = S =: \int_a^b f(x) dx$: f の $[a, b]$ での定積分

- (Darboux の定理) $(\Delta_n)_{n=1}^\infty$: 分割の列で、 $|\Delta_n| \rightarrow 0$ とする。この時、
 $s_{\Delta_n} \rightarrow s, S_{\Delta_n} \rightarrow S$ ($n \rightarrow \infty$)。

- 定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る :

$$\int_a^b f(x) dx = I \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta = \Delta_\varepsilon : [a, b] \text{ の分割} : I - \varepsilon \leq s_\Delta, S_\Delta \leq I + \varepsilon$$

- 次の Riemann 和を用いて定式化することもある :

★ $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$: 各小区間から代表点を 1 つずつ選んだもの ($\xi_i \in I_i$)

$$I(\Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) : \text{Riemann 和}$$

★ f が $[a, b]$ で積分可能 $\iff \exists \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi)$ 。この時、 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(\Delta, \Xi) = \int_a^b f(x) dx$

6-2. 積分の基本性質.

- 区間に関する加法性 : $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

- 線型性 : $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx, \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

- 単調性 : $[a, b]$ で $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

6-3. 不定積分. 定積分関数 $\int_a^x f(t) dt$ に於いて、下端の違いによる定数の差を気にしない時、単に $\int f(x) dx$ と書く。... 不定積分

6-4. 微分積分学の基本定理. f が連続ならば、有界閉区間に於いて積分可能で、

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

即ち、不定積分 = 原始関数 (微分すると f になる関数)。... 微分法と積分法との邂逅 !!
 又、 F を f の原始関数 (の一つ) とすると、

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \left(= \left[F(x) \right]_a^b \text{ と書く} \right)$$

— 抽象的存在は反復によって具体的存在と化する。
 足立恒雄「類体論へ至る道」より