

7. 広義積分 (変格積分)

7-1. 広義積分 (変格積分). 積分区間又は非積分関数が有界でない場合.

下記の右辺の極限が存在する場合、左辺の積分が収束するという。

- f : 区間 $[a, b)$ (resp. $(a, b]$) の上端 b (resp. 下端 a) の近くで有界でない場合

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

- f : 区間 $[a, +\infty)$ (resp. $(-\infty, b]$) で定義されている場合

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^b f(x)dx$$

- f : 区間 $[a, b]$ の内点 c の近くで有界でない場合

→ 積分区間を $[a, c), (c, b]$ に分けて、それぞれ考えよ。

- f : 積分区間の両端 a, b で広義積分の場合 (a, b の近くで有界でないか、 $a, b = \pm\infty$)

→ 適当な点 c で積分区間を $(a, c], [c, b)$ に分けて、それぞれ考えよ。

- 典型的な例:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \leq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow \text{収束} \\ \alpha \geq 1 \Rightarrow \text{発散} \end{cases}$$

- 比較判定法 (簡単な場合):

$$\star \exists \varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) (x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx : \text{収束}$$

$$\star \exists \varepsilon > 0 : f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right) (x \rightarrow +0) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx : \text{収束}$$

7-2. Γ 関数・B 関数.

- $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$: Γ 関数 (広義積分は $s > 0$ で収束)

- $B(s, t) = \int_0^1 x^s (1-x)^t \frac{dx}{x(1-x)}$: B 関数 (広義積分は $s > 0, t > 0$ で収束)

- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

7-3. 練習問題.

- (1) $0 < \alpha < 1 < \beta$ かつ $\alpha\beta = 1$ とする。広義積分

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx, \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$$

をそれぞれ求めた上で比較し、それをグラフの下の面積という観点から解釈せよ。

- (2) a, b を正の実数として、広義積分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bxdx, \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bxdx$$

を、色々な方法で求めてみよう。

- (a) 部分積分して I, J の間の関係式を 2 つ求め、それらを連立して I, J を求めよ。
(2 回部分積分してそれぞれが満たす関係式を得る方法と、実質的には同じ。)

- (b) 形式的に $K = I + iJ$ とおくと、Euler の公式により、

$$K = \int_0^{+\infty} e^{(-a+bi)x} dx$$

となる。複素数 $\alpha = -a + bi \in \mathbb{C}$ に対しても、 $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ となることを考え、広義積分 K の値を求め、その実部・虚部として I, J を得よ。(この考えは、複素数の指数関数や複素数値関数の微分積分をしかるべく定式化することにより正当化される。詳しくは複素関数論で。)