8. 積分の計算法

8–1. 有理関数の積分. 部分分数に分解し、次の場合に帰着。（但し $c>0$）

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx$ ：$n=1$ なら $\log|x-a|$, $n\geq 2$ なら $\displaystyle -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $\sqrt{c}\,t=x+b, \sqrt{c}\,dt=dx$ で $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ に帰着
  $\longrightarrow$ $n=1$ なら $\arctan t$, $n\geq 2$ なら部分積分で $n-1$ の場合に帰着
- $\displaystyle\int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n}dx$ ：変数変換 $t=(x+b)^2+c, dt=2(x+b)dx$ で $\displaystyle\int \frac{dt}{t^n}$ に帰着

8–2. 冪根（平方根など）を含む積分. 不定積分（原始関数）が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$ の有理式の積分
  $\longrightarrow$ 変数変換 $y^n=ax+b, ny^{n-1}dy=adx$ で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$（$\sqrt{1\text{次式}}$ 2 種類）の有理式の積分
  $\longrightarrow$ 変数変換 $y^2=ax+b, 2ydy=adx$ で $\sqrt{2\text{次式}}$ の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理式の積分
  $\longrightarrow$ $y^2=ax^2+bx+c$ 上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3\text{次以上の多項式}}$ の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。
  （$\sqrt{3\text{次式又は}4\text{次式}}$ の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。）

8–3. 三角関数の有理関数の積分. $t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

8–4. 練習問題.

(1) 次の有理式を部分分数分解せよ。

(a) $\dfrac{1}{x(x-1)}$　　(b) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$　　(c) $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$

(2) 有理関数 $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-30}{x^2(x^2-2x+10)}$ の不定積分を計算したい。

(a) $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c(2x-2)+d}{x^2-2x+10}$ を満たす定数 a,b,c,d を求めよ。

(b) それぞれの項の不定積分を計算して、$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ。

(3) 不定積分

$$I_n=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}\qquad (n=1,2,\dots)$$

を考える。

(a) $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}=(x)'\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ と見て部分積分することにより、I_n と I_{n+1} との間の関係式を求めよ。

(b) I_2, I_3 を求めよ。

(4) 次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。

(a) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+9}\,dx$　　(b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x-2x^2}}{2+x}\,dx$　　(c) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x+\sin x}\,dx$

(5) 次の不定積分を求めよ。

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-1}\,dx$　　(b) $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$　　(c) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x^2}\,dx$

9. 積分の公式

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$$

$$\int \log x dx = x\log x - x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x dx = -\log|\cos x|$$

$$\int \cot x dx = \log|\sin x|$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \tanh x dx = \log\cosh x$$

$$\int \coth x dx = \log|\sinh x|$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int \mathrm{cosec}^2 x dx = -\cot x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases} \quad (\text{注})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arcsinh}\, x = \log(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log|x+\sqrt{a+x^2}|$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh}\, x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \log|x+\sqrt{x^2-1}|\right)$$

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\int \mathrm{arcsinh}\, x dx = x\,\mathrm{arcsinh}\, x - \sqrt{1+x^2}$$

$$\int \mathrm{arctanh}\, x dx = x\,\mathrm{arctanh}\, x + \frac{1}{2}\log(1-x^2)$$

（注）

- $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ ではあるが、不定積分では定数の差は気にしないので、いづれでもよい。
- $\arcsin x, \arctan x$ 等は所謂主値を取る：$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

— 例示は理解の試金石
結城 浩「数学ガール」(`http://www.hyuki.com/girl/`) より