

## 8. 積分の計算法

8-1. 有理関数の積分. 部分分数に分解し、次の場合に帰着。(但し  $c > 0$ )

- $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$  :  $n = 1$  なら  $\log|x-a|$ ,  $n \geq 2$  なら  $-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$
- $\int \frac{1}{((x+b)^2+c)^n} dx$  : 変数変換  $\sqrt{c}t = x+b, \sqrt{c}dt = dx$  で  $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$  に帰着  
 $\rightarrow n = 1$  なら  $\arctan t$ ,  $n \geq 2$  なら部分積分で  $n-1$  の場合に帰着
- $\int \frac{2(x+b)}{((x+b)^2+c)^n} dx$  : 変数変換  $t = (x+b)^2+c, dt = 2(x+b)dx$  で  $\int \frac{dt}{t^n}$  に帰着

8-2. 冪根(平方根など)を含む積分. 不定積分(原始関数)が求まる幾つかの例を挙げる。

- $\sqrt[n]{ax+b}$  の有理式の積分  
 $\rightarrow$  変数変換  $y^n = ax+b, ny^{n-1}dy = adx$  で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+b}$  ( $\sqrt{1}$  次式 2 種類) の有理式の積分  
 $\rightarrow$  変数変換  $y^2 = ax+b, 2ydy = adx$  で  $\sqrt{2}$  次式 の有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$  の有理式の積分  
 $\rightarrow y^2 = ax^2+bx+c$  上の点を用いた有理媒介変数表示で有理関数の積分に帰着
- $\sqrt{3}$  次以上の多項式の積分は、一般には初等関数の範囲に収まらない。  
 ( $\sqrt{3}$  次式又は 4 次式 の場合は楕円関数と呼ばれる関数になる。)

8-3. 三角関数の有理関数の積分.  $t = \tan \frac{x}{2}$  と置くと、有理関数の積分に変数変換できる。

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

8-4. 練習問題.

(1) 次の有理式を部分分数分解せよ。

$$(a) \frac{1}{x(x-1)} \quad (b) \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \quad (c) \frac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

(2) 有理関数  $f(x) = \frac{x^3+x^2-4x-30}{x^2(x^2-2x+10)}$  の不定積分を計算したい。

(a)  $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c(2x-2)+d}{x^2-2x+10}$  を満たす定数  $a, b, c, d$  を求めよ。

(b) それぞれの項の不定積分を計算して、 $\int f(x)dx$  を求めよ。

(3) 不定積分

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を考える。

(a)  $\frac{1}{(1+x^2)^n} = (x)' \frac{1}{(1+x^2)^n}$  と見て部分積分することにより、 $I_n$  と  $I_{n+1}$  との間関係式を求めよ。

(b)  $I_2, I_3$  を求めよ。

(4) 次の不定積分を、有理関数の積分に帰着せよ。

$$(a) \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+9} dx \quad (b) \int \frac{\sqrt{1-x-2x^2}}{2+x} dx \quad (c) \int \frac{1}{1+\cos x + \sin x} dx$$

(5) 次の不定積分を求めよ。

$$(a) \int \frac{1}{x^3-1} dx \quad (b) \int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (c) \int \frac{\log x}{x^2} dx$$