本ページ余白

2018年度春期　数学BI（微分積分）（SCT117I0）中間試験（担当：角皆）

実施: 2018年6月18日 (月), 13:30 〜 15:00, 紀–B210教室

1. 一般的な諸注意

- 以下の要領で期末試験に準じて行なう。
- 学生証を机上に提示すること。
- 入室は試験開始後20分まで認める。退室は試験開始後30分を過ぎたら認める。
- 机の上に出してよい物は、学生証の他に筆記用具・下敷（白色かそれに近いもので無地）・時計（電卓・通信等の機能のないもの）のみ。
- ノート・プリント・参考書等の参照不可。計算機の使用不可。
- 携帯電話・スマートフォン・ウェアラブル端末等は、電源を切って鞄の中にしまっておくこと。くれぐれも鳴らさないこと。時計としての使用も不可。
- 不正の疑いを招く行為は慎むこと。
- 試験開始まで問題用紙を裏返しておくこと。
- 試験開始後、まず初めに学生番号・名前を答案用紙の**両面**に記入すること。学生番号・名前の記入はボールペン・サインペン等で行なうこと。
- 試験時間が終了したら直ちに解答を終了して筆記用具を置き、その後で指示に順って答案用紙を提出すること。
- 問題用紙は持ち帰ること。

2. 問題・解答について

- 解答は答案用紙に記述すること。問題番号ごとに指定された場所に書くこと。但し、
  - ⋆ 問1は直観問題であり、○×のみを**解答欄**に記入すればよい。
  - ⋆ 問2・3は値のみを**解答欄**に記入すればよい。
  - ⋆ 問4 (2) は、値を**解答欄にも**記入すること。
- 問7・8で、「可能なら」として挙げてある問題の方を解答する場合には、元の問題は解答する必要はない。
- 採点者が読めない答案・意図が伝わらない答案では採点できない。採点者が読めるよう、文字・記号を丁寧に書くこと。数式も文であり、答案は文章である。数式のみで充分な場合もあるので、殊更に丁寧過ぎる必要はないが、数式の散漫な羅列ではいけない。必要に応じて、「とする」「となればよい」「したがって」などの言葉を適切に用いて、意図・論理の伝わる答案を心掛けること。答案の記述は言わば筆記プレゼンテーションであるから、その良し悪しも評価対象である。

3. 期末試験について

- 期日：期末試験期間内に行なう予定。
- 範囲：春期に講義した範囲。中間試験までの範囲も含む。

2018年度春期　数学BI（微分積分）（SCT117I0）中間試験（担当：角皆）

問 1.　次の級数は収束するか。収束するなら○を、しないなら×を、解答欄に記せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{2018}}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^{2018}}{n^2}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin n$

問 2.　次の冪級数の収束半径（すなわち、$|x| < r$ なら絶対収束し、$|x| > r$ なら発散するような r）を求め、解答欄に記せ。（任意の実数 x に対して絶対収束する場合は ∞ と、$x = 0$ のときのみ絶対収束する場合は 0 と記せ。）

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n + n2^n}x^n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!}x^n$

問 3.　Taylor 展開を利用して、次の $x \to 0$ での極限値を求めよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$　　(2) $\dfrac{\log(1-2x) + 2x + 2x^2}{x^3}$　　(3) $\dfrac{e^x\cos x - 1 - x}{x^3}$

問 4.　$f(x) = \cos x$ の Taylor 展開を用いて、$\cos 1$ の近似値を計算したい。以下の計算においては、右側に掲載した「$n!, 1/n!$ の表」を利用して良いが、適切な桁までを用いた上で、四捨五入した桁を $3.14\cancel{1}, 3.141\overset{6}{\cancel{5}}\cancel{9}$ のように明示して書くこと。

(1) $\cos x$ の Taylor 展開の剰余項 $R_N(f; x)$ について、$|R_N(f; 1)| < 10^{-6}$ となる（なるべく小さい）N を与えよ。
(2) $\cos 1$ の近似値を小数第 5 位まで計算せよ。（値を解答欄にも記入せよ。）
(3) この近似値計算に於ける打切誤差と丸め誤差との上からの評価について述べた上で、求めた近似値と真の値との誤差が 10^{-5} 以下であることを保証せよ。

問 5.　次の関数 f の Taylor 展開を、x^4 の項までの係数を明示して求めよ。（一般項を求めて総和記号で書ければそれでも良い。）

(1) $f(x) = \cos^2 x$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3x + 2x^2}$

問 6.　関数 $f(x) = x^3$ について、任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ に対し $x = a$ で連続であることを、ε-δ 流で証明せよ。即ち、任意の正の数 ε に対して、或る正の数 δ が存在して、$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となることを、ε に応じて δ を与えることによって示せ。証明の形式は次に順うと良い。

> $\forall\varepsilon > 0$ を取る。
> $\delta = \boxed{\quad ? \quad}$ と取ると、
> $|h| < \delta$ に対し、
>
> $\cdots$
> $|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon$ を示す
> $\cdots$
>
> 従って、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となり、f は $x = a$ で連続。

問 7.　数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ となることを示せ。（可能なら、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ となることの方を示しても良い。）

問 8.　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することを、部分和 $\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2}$ と積分 $\displaystyle\int_{x=1}^{N}\frac{1}{x^2}dx$ とを比較することにより示せ。（可能なら、$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ の収束・発散の判定を、同様の方法で示しても良い。）

以上

Taylor 展開の例

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\log\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

$n!, 1/n!$ の表

n	$n!$	$1/n!$
0	1	1
1	1	1
2	2	0.5
3	6	0.166666666667
4	24	0.041666666667
5	120	0.008333333333
6	720	0.001388888889
7	5040	0.000198412698
8	40320	0.000024801587
9	362880	0.000002755732
10	3628800	0.000000275573
11	39916800	0.000000025052
12	479001600	0.000000002088
13	6227020800	0.000000000161
14	87178291200	0.000000000011