$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x)=x^2$ の $[0,a]$ での定積分 $I=\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を計算したい。

分割 $\Delta_n : 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=a$ を n 等分な分割（即ち $x_i=\dfrac{ia}{n}$）とする。

(1) 各小区間 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ での $f(x)$ の下限 $m_i=\displaystyle\inf_{x\in I_i} f(x)$ および上限 $M_i=\displaystyle\sup_{x\in I_i} f(x)$ は何か。

(2) $s_{\Delta_n}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ 及び $S_{\Delta_n}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$ を計算せよ。

(3) 任意の n に対して $s_{\Delta_n}\leq I\leq S_{\Delta_n}$ であることから、$I=\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求めよ。（$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}, \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}$ が、それぞれ存在して等しくなることを確かめよ。）