2018年度春期

数学BI（微分積分）
（情報理工学科クラス）

（担当：角皆）

理工学の大学初年級で学ぶ数学

<table>
<tr><th colspan="2">数学の分野
（手法）</th><th>解析学
（無限小解析）</th><th>代数学</th></tr>
<tr><td colspan="2">理工学の
大学初年級では</td><td>微分積分</td><td>線型代数</td></tr>
<tr><td rowspan="3">本学
理工学部
1 年次
では</td><td rowspan="2">春</td><td>数学 BI
（微分積分）</td><td>数学 AI
（線型代数）</td></tr>
<tr><td colspan="2">数学演習 I</td></tr>
<tr><td>秋</td><td colspan="2">微分方程式の基礎
数学 BII（多変数微積）
数学 AII（線型空間論）
数学演習 II</td></tr>
<tr><td colspan="2">標語的には</td><td>不等式の数学</td><td>等式の数学</td></tr>
</table>

本講義の概要

- 不等式による評価
- 収束・極限の基礎付け（ε-δ 論法）
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式」は
高校までては殆ど扱わない

不等式なんて高校でやったよ!!

高校で扱った不等式

例：2 次不等式

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

$$(x-2)(x-5) < 0$$

従って、

$$2 < x < 5 \quad \square$$

例：2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

を解け。

解答：

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

従って、

$$x = 2, 5 \quad \square$$

「不等式」と言っても、
動作は等式の扱いと同様であった

では、ここで言う

「不等式の数学」

とはどういうものか？

不等式の数学とは？

収束・発散・極限などなど、

それも

- **はさみ打ちの原理**
- **区分求積法**
- **誤差の評価 (estimate)**

など

不等式の数学とは？

と言っても難しいことではない

使うことはこの程度

- **推移律**：$x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
- **反対称律**：$x \leq y, y \leq x \Longrightarrow x = y$
- **演算との関係**：
  - $\star\ x \leq y \Longrightarrow x + a \leq y + a$
  - $\star\ a > 0, x \leq y \Longrightarrow ax \leq ay$
- **三角不等式**：$|x + y| \leq |x| + |y|$
  (triangle inequality)

三角不等式の使い方

例題：

分銅 X ははぼ 3 g で誤差 0.01 g 以内、

分銅 Y ははぼ 5 g で誤差 0.02 g 以内、

であるとする。

両方合わせるとほぼ何 g で誤差はどれくらいか？

三角不等式の使い方

分銅 X が x g、分銅 Y が y g であるとする。

$$|x-3| \le 0.01, \qquad |y-5| \le 0.02$$

ほぼ $3+5=8$ g であるのは良かろう。

誤差は、$|(x+y)-(3+5)|$ g である。

これはいくら以内か？（上からの評価）

三角不等式の使い方

$$|x-3| \leq 0.01, \qquad |y-5| \leq 0.02$$

$$\begin{aligned} |(x+y)-(3+5)| &= |(x-3)+(y-5)| \\ &\leq |x-3|+|y-5| \\ &\leq 0.01+0.02 \\ &= 0.03 \end{aligned}$$

従って、誤差は 0.03 **g 以内。**

問 1：

縦が大体 3cm**、横が大体** 5cm **の長方形の紙がある。**

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、

面積の誤差が 0.1cm^2 **以内**

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

真の縦の長さを x cm**、**

真の横の長さを y cm **としよう。**

この時、面積の誤差は $|xy - 15|$ cm^2 **と表せる。**

$x = 3 + h,\ y = 5 + k$ **とおくと、**

h, k **がそれぞれ縦横の誤差である。**

誤差が δ cm **以内とすると、**

$$0 \leq |h| \leq \delta, \qquad 0 \leq |k| \leq \delta$$

設定：

$$\begin{cases} x = 3 + h, & 0 \le |h| \le \delta \\ y = 5 + k, & 0 \le |k| \le \delta \end{cases}$$

目標：

$$|h| \le \delta, |k| \le \delta \Longrightarrow |xy - 15| \le 0.1$$

となる δ を見付けること

目標：$|h| \leq \delta, |k| \leq \delta \Longrightarrow |xy - 15| \leq 0.1$
となる δ を見付けること

- **δ は 1 つ見付ければ良い**

- **余り小さ過ぎない方が良い**
- **余りぎりぎりでなくても良い**
  $\longrightarrow$ **桁くらい判れば良いだろう**

- **論理的には厳密であること（$\fallingdotseq$ ではなくて）**

- **誤差の限界（今は 0.1）が小さくなっても通用する方法が良い**

$$0 \le |h| \le \delta, \qquad 0 \le |k| \le \delta$$

$$\begin{aligned} |(3+h)(5+k)-15| &= |5h+3k+hk| \\ &\le 5|h|+3|k|+|h||k| \\ &\le 5\delta+3\delta+\delta^2 \\ &= 8\delta+\delta^2 \end{aligned}$$

従って、

$$8\delta+\delta^2 \le 0.1$$

となれば良い

2 次不等式

$$8\delta + \delta^2 \le 0.1$$

を解くのは大変だ

しかし、

- 誤差の限界 δ が大きい時は興味がない
- ぎりぎりを狙う必要はない

$\longrightarrow$ **例えば** $\delta \le 1$ という条件付きで考えれば良い

そこで、

$$\delta \leq 1$$

とする。すると、

$$\begin{aligned} 8\delta + \delta^2 &\leq 8\delta + \delta \\ &= 9\delta \end{aligned}$$

であるから、

$$9\delta \leq 0.1$$

となればよい。これより、

$$\delta \leq \frac{0.1}{9} \quad (= 0.0111\cdots)$$

となるので、$\delta \leq 0.01$ **ならばよい。**

これと、さっき仮定した

$$\delta \leq 1$$

とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\{1, 0.01\} = 0.01$$

<u>に取れる</u>。従って、縦横の長さの誤差は

0.01cm **以内**

<u>であれば良い</u>。

さっき $\delta \leq 1$ とした後に、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + 1$$

とすることも出来た
（ここだけ見るなら論理的には正しい）

しかし、これだと

$$8\delta + 1 \leq 0.1$$

としなければならなくなってしまい困る

$\longrightarrow$ **目標を見定めて議論を進める必要性**

（技術的な細かい話）

もう少し厳しく、

$$\delta \leq \frac{1}{10} = 0.1$$

としておけば、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \frac{1}{100}$$

なので、

$$8\delta + \frac{1}{100} \leq 0.1$$

であれば良い

このような δ なら取ることが出来る

（技術的な細かい話）

しかし、この論法のためには、

0.1 だったらどれくらいにすれば良いか、

かなり注意深く取っておかないと破綻する

（本末転倒）

さっきのように、$\delta \leq 1$ の下で、

$$\delta^2 \leq \delta$$

で評価しておけば、

誤差の限界が小さくなっても、

後で δ を小さくとれば対応できる

（技術的な細かい話）

勿論、より精密な限界が知りたければ／必要ならば、

- 2 **次不等式** $8\delta + \delta^2 \leq 1$ **を解くなり、**
- **もっと精密な評価をするなり、**

すればよい／せねばならない

今までは、
誤差の限界が $0.1\mathrm{cm}^2$ **に設定されていて、**
その値以内に収めようとしてきたが、

この場合、原理的には、
どんなに厳しい（小さい）限界に対しても、
同様の議論が可能

$\longrightarrow$ **誤差の限界が** $0.001\mathrm{cm}^2$ **だったら？**

$\longrightarrow$ **より一般に、誤差の限界を** $\varepsilon\ \mathrm{cm}^2$ **とすると？**

問 1^+：

縦が大体 3cm**、横が大体** 5cm **の長方形の紙がある。**

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、正の実数値 $\varepsilon > 0$ **に対し、**

面積の誤差が ε cm^2 **以内**

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

任意の（どんなに小さい）
正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても、

$$|h| \le \delta, |k| \le \delta \Longrightarrow |(3+h)(5+k) - 15| \le \varepsilon$$

となる正の実数値 $\delta > 0$ を見付けることが
可能であった

（ε が小さければ δ も小さくしなければ
いけないけれども）

これはどういうことかと言うと、

「h, k が充分 0 に**近ければ**、

$(3+h)(5+k)$ は充分 $3 \cdot 5 = 15$ に**近い**」

ということを言っている

これが

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} (3+h)(5+k) = 15$$

すなわち

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ y \to 5}} xy = 15$$

の実質的な意味内容なのであった !!