

前回の復習から

- この部分は写すな
- 自分のノートを見直せ
- 必要があれば補足事項を書き込め

本講義の概要

- 不等式による評価
- 収束・極限の基礎付け (ε - δ 論法)
- 級数和の収束発散や簡単な場合の判定法
- 平均値の定理から Taylor の定理に至る話
- 逆三角関数など幾つかの新しい関数
- 積分の基礎付けや計算方法

「不等式の数学」とは？

収束・発散・極限などなど、それも

- はさみ打ちの原理
- 区分求積法
- 誤差の評価 (**estimate**)

など

問 1+ :

縦が大体 3cm、横が大体 5cm の長方形の紙がある。

従って、面積は大体

$$3 \times 5 = 15\text{cm}^2$$

である。さて、正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

面積の誤差が $\varepsilon \text{ cm}^2$ 以内

であることを保証するためには、

縦横の長さの誤差をどの程度に収めれば良いか？

真の縦の長さを $(3 + h)$ cm、
真の横の長さを $(5 + k)$ cm、
誤差が δ cm 以内とすると、

$$0 \leq |h| \leq \delta, \quad 0 \leq |k| \leq \delta.$$

$$\begin{aligned} |(3 + h)(5 + k) - 15| &= |5h + 3k + hk| \\ &\leq 5|h| + 3|k| + |h||k| \\ &\leq 8\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

従って、 $8\delta + \delta^2 \leq \varepsilon$ となれば良い。

ここで、(例えば) $\delta \leq 1$ とする。すると、

$$8\delta + \delta^2 \leq 8\delta + \delta = 9\delta$$

であるから、 $9\delta \leq \varepsilon$ となれば良い。これより

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{9}$$

となる。これと、さっき仮定した $\delta \leq 1$ とを共に満たせば良いので、

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\}$$

に取れる。従って、縦横の長さの誤差は

$$\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{9}\right\} \text{ cm 以内}$$

であれば良い。

任意の (どんなに小さい)

正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対しても、

$$|h| \leq \delta, |k| \leq \delta \implies |(3+h)(5+k) - 15| \leq \varepsilon$$

となる正の実数値 $\delta > 0$ を見付けることが
可能であった

(ε が小さければ δ も小さくしなければ
いけないけれども)

これはどういうことかと言うと、

「 h, k が充分 0 に近ければ、

$(3 + h)(5 + k)$ は充分 $3 \cdot 5 = 15$ に近い」

ということを行っている

これが

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} (3 + h)(5 + k) = 15$$

或は

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 5}} xy = 15$$

の実質的な意味内容なのであった!!(以上復習)

さて、(詳しく見るために)少し問題を単純にして、

問 2 :

一辺が大体 3cm の正方形
(従って面積は大体 9cm^2) で、

正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

面積の誤差を $\varepsilon \text{ cm}^2$ 未満にしたければ、

一辺の誤差をどの程度に収めれば良いか。

更に問題を単純にして、

一辺の長さは縦横ともに $(3 + h)$ cm とし、

誤差は δ cm 未満（つまり $|h| < \delta$ ）としよう。

$$\begin{aligned} |(3 + h)^2 - 9| &= |6h + h^2| \\ &\leq 6|h| + |h|^2 \\ &< 6\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

この後は前回のように ……

問 2⁺ :

関数 $f(x) = x^2$ において、

x を 3 に近づけると $f(x)$ は 9 に近づくようだが、

その誤差について、正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$|f(x) - 9| < \varepsilon$$

となるためには、

x がどの程度 3 に近づければ良いか？

($|x - 3| < \delta \implies |f(x) - 9| < \varepsilon$ となるには、
 δ の値をどれくらいにすれば良いか？)

($x = 3 + h$ と置くと計算し易い)

これは何をやっているかと言うと、

「 h が充分 0 に近ければ、
 $(3+h)^2$ は充分 9 に近い」

ということを言っている

「 x が充分 3 に近ければ、
 x^2 は充分 9 に近い」

と言っても良い

これが

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3 + h)^2 = 9$$

すなわち

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

の実質的な意味内容なのであった !!

どんな（小さな）正の実数 ε に対しても、
或る（都合の良い）正の実数 δ が存在して、
どんな実数 x に対しても、

$$0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

記号で書くと、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$0 < |x - 3| < \delta \implies |x^2 - 9| < \varepsilon$$

この流儀で $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ を定式化（定義）すると
色々な議論がきちんと出来て良さそうだ

ε - δ 流の関数の極限の定義

関数 f に対し、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow b \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right)$$

ということを、次で定義する：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon$$

ε - δ 流の関数の連続の定義

関数 f が $x = a$ で連続であるとは、

$$x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow f(a) \text{ である}$$
$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right)$$

ということであったから、次のようになる：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

問 2⁺⁺ :

関数 $f(x) = x^2$ について、

f が $x = 3$ で連続であることを (ε - δ 流で) 示せ。

すなわち、

任意の正の実数値 $\varepsilon > 0$ に対し、

或る正の実数 $\delta > 0$ が存在して、

任意の実数 x に対し、

$$|x - 3| < \delta \implies |x^2 - 3^2| < \varepsilon$$

となること ($\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$) を示せ。

($x = 3 + h$ と置くと計算し易い)

演習問題 1 :

- (1) 関数 $f(x) = x^2$ について、 f が $x = -4$ で連続であることを、
- (a) (ε - δ 流に) 論理記号を交えた数式で記述せよ。
 - (b) 証明せよ。
- (2) 関数 $f(x) = x^3$ について、任意の実数 a に対し、 f が $x = a$ で連続であることを、
- (a) (ε - δ 流に) 論理記号を交えた数式で記述せよ。
 - (b) 証明せよ。

記述に関する注意

- 答案は小論文、
「日本語・数式混じり文」
で書く文章（計算問題であっても）
- 構成（論理構造）が大切
- 適切に改行する
- 単に数式を書いたら
「である / が成り立つ」
という主張（その意味なら「体言止め」で可）

記述に関する注意

- (再掲) 単に数式を書いたら
「である / が成り立つ」
という主張 (その意味なら「体言止め」で可)
- それ以外の場合は適切に
「とおく / とする / と仮定する」
「であるとき / ならば」
「より / なので / であるから」
「となればよい / であれば充分である」
など、接続詞的語句を補う
(というか、
これこそが論理構造を示す重要な部分！)

以上のような「不等式の取扱い」を用いて、

「収束」「発散」「極限」などについて、

詳しく調べていこう

ε - δ 流の関数の微分の定義

関数 f が $x = a$ で微分可能であるとは、

$x \rightarrow a$ のとき $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が或る実数に収束する
($\exists \alpha \in \mathbb{R} : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \alpha$)

ということであったから、次のようになる：

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \\ 0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right| < \varepsilon$$

ε - δ 流の関数の微分の定義

$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right| < \varepsilon$$

このとき、

(この α が一意的であることが示せるので、)

$$f'(a) := \alpha$$

と書き、 f の a における**微分係数**という：

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

関数の微分可能性の意味：線型近似

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right| < \varepsilon$$

の部分はただの不等式なので、次のようにも書ける：

$$\left| f(x) - (f(a) + \alpha(x - a)) \right| < \varepsilon |x - a|$$

$x = a$ の近くで、

$f(x)$ と 1 次関数 $f(a) + \alpha(x - a)$ とが極めて近い
(隔たりが $\varepsilon |x - a|$ 未満)

関数の微分可能性の意味：線型近似

関数 f が $x = a$ で微分可能であるとは、
 $x = a$ の近くで、
 $f(x)$ が 1 次関数で “極めて良く” 近似できること

“線型近似”

$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$

$0 < |x - a| < \delta \implies$

$$\left| f(x) - (f(a) + \alpha(x - a)) \right| < \varepsilon |x - a|$$

そのときの 1 次の係数 α が $x = a$ での微分係数

関数の高次の近似

では更に、関数 f が $x = a$ の近くで、
2 次関数で“極めて良く”近似できるだろうか？

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} :$

$0 < |x - a| < \delta \implies$

$$\left| f(x) - (f(a) + \alpha(x - a) + \beta(x - a)^2) \right| < \varepsilon |x - a|^2$$

更に続けて、 n 次関数で...

極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限 \longleftrightarrow 有限

連続量
(analog) \longleftrightarrow 離散量
(digital)

等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) \end{aligned}$$



関数を「多項式の極限」として表すこと
(冪級数・整級数)

一般に、関数 f について、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう … **Taylor 展開**

→ 係数 $a_n = ?$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$