

# 極限

良く分からないものを、良く分かるもので近似する

無限  $\longleftrightarrow$  有限

連続量  
(analog)  $\longleftrightarrow$  離散量  
(digital)

## 等比級数の和の公式

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

逆に見ると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)\end{aligned}$$



関数を「多項式の極限」として表すこと  
( 冪級数・整級数 )

一般に、関数  $f$  について、

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

と表すことを考えよう … Taylor 展開

→ 係数  $a_n = ?$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

従って、

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

と表せるとすれば、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad : f \text{ の形式的 Taylor 展開}$$

(形式的) Taylor 展開を計算してみよう !!

直接判る例 :

- 多項式関数 : そのまま  
( だけど面白い例もある )
- 高階微分  $f^{(n)}(x)$  が良く判る場合 :  
 $\sin x, \cos x, e^x$  など

## 二項定理

$$\begin{aligned}(1+x)^N &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n \\ &= 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2}x^2 + \cdots + x^N\end{aligned}$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} = {}_N C_n$$

: 二項係數 (**binomial coefficient**)

## 指数関数・三角関数

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\end{aligned}$$

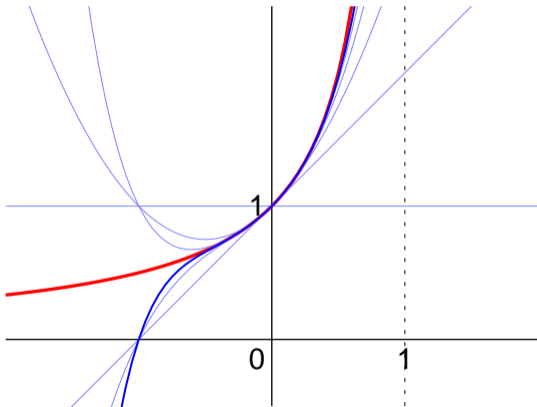
$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\end{aligned}$$

## Taylor 展開の利点 (何が良いか)

- $x = 0$  の近くでの様子が分かる
  - ★ 近似値の計算
  - ★  $x \rightarrow 0$  の極限の様子
- 統一的・一意的表示
- 良く分からない関数の色々な性質が分かる (かも)



例： $f(x) = \frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$



## Taylor 展開を用いた近似値の計算

例： $\frac{1}{1-0.02} = ?$        $e^{0.02} = \exp(0.02) = ?$

→ どの辺で打切るとどの程度の誤差か？

## Taylor 展開を用いた $x \rightarrow 0$ の極限の計算

例： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$

## 演習問題 2 :

(1)  $f(x) = \sin x$  の Taylor 展開を求めよ。

(2) これを利用して、

(a) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$  を求めよ。

(b)  $\sin 1$  の近似値を小数第 4 位まで求めよ。

## (形式的) Taylor 展開の計算

高階微分  $f^{(n)}(x)$  の直接計算が難しい場合  
(または、 $f^{(n)}(x)$  を直接計算しなくても):

- 既知の公式から (等比級数の和など)
- 既知の展開に代入
- 既知の展開から四則演算で
- 既知の展開から項別微積分で

## 無限等比級数の和

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-rx} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n x^n \\ &= 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots\end{aligned}$$

収束 (して一致)  $\iff |rx| < 1$

$$\iff |x| < \frac{1}{|r|}$$

(この例は念頭に置いておこう)

## (形式的) Taylor 展開の計算

例題：

$$(1) e^{-x^2} = \exp(-x^2)$$

$$(2) e^x \cos x$$

$$(3) \frac{1}{\cos x}$$

$$(4) -\log(1 - x)$$

(詳しくは演習の時間に)