

中間試験は鋭意採点中

後半の主な内容は積分だが、

今日は 幕間 (**intermission**)

その前にちょっと補足

## Taylor 展開の問題点 (考えなくてはならないこと)

- 級数が収束するか？
- 収束したら元の関数と一致するか？
- 誤差の理論的評価は？
- 項別微積分 (極限操作の順序交換) を  
行なってよいか？

形式的 Taylor 展開が収束しても、

元の関数と一致しない例

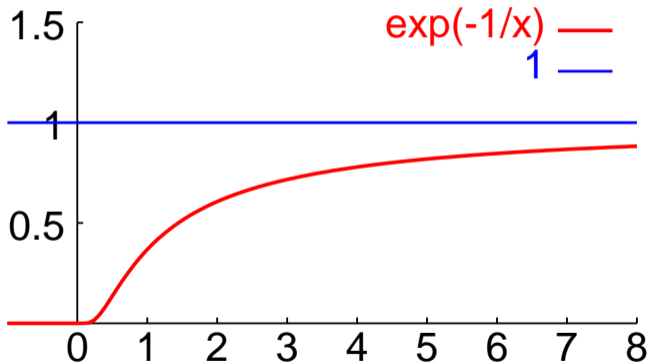
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \end{cases}$$

実は、 $f^{(n)}(0) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

従って、形式的 Taylor 展開は 0

しかし勿論  $x > 0$  では  $f(x) \neq 0$

形式的 Taylor 展開が収束しても、  
元の関数と一致しない例



さてさて、幕間のお話

何処に辿り着くやら、お楽しみ

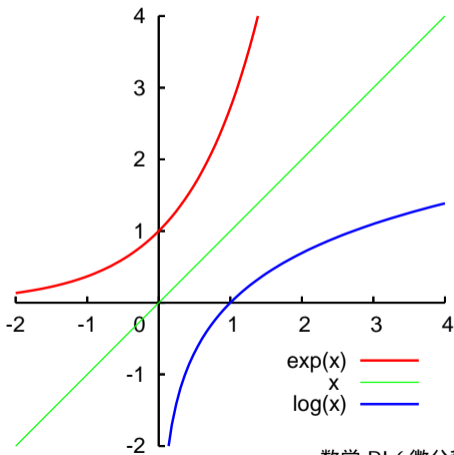
## 指数関数・対数関数は互いに逆関数

$$y = \exp x \iff x = \log y$$

$$\log(\exp x) = x$$

$$\exp(\log x) = x$$

## 指数関数・対数関数は互いに逆関数



指数関数：

$y = \exp x$  は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y$$

を満たす。

対数関数：

$y = \log x$  は積分表示

$$y = \int_{t=1}^x \frac{dt}{t}$$

を持つ。

→ 実はこれは表裏一体



三角関数  $y = \sin x$  で同様に考えよう

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

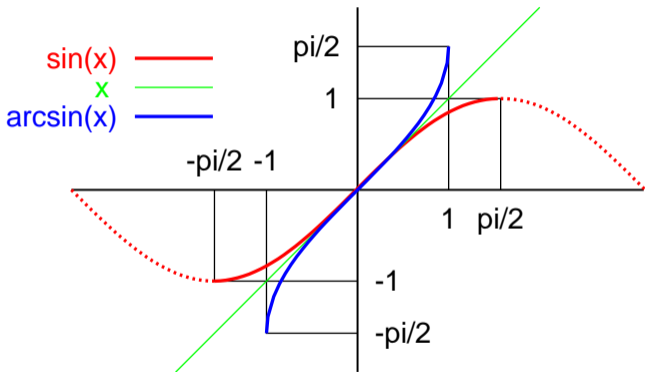
なので、次の微分方程式を満たす：

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

従って、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$

$y = \sin x$  の逆関数  $y = \arcsin x$



## $y = \arcsin x$ の積分表示

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

より

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

従って、

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

## $y = \arcsin x$ の積分表示

通常  $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  と書いてしまうが、

変数を変えて正式に書けば、

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

ということ。

$x = 0$  のとき  $\arcsin 0 = 0$  (即ち  $\sin 0 = 0$ ) だから、

積分の下端は  $0$  で良い。

## $y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

二項展開して項別積分すると、

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_{t=0}^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}\end{aligned}$$

## $y = \arcsin x$ の積分表示と Taylor 展開

$$\arcsin x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-t^2)^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$$

$(|x| < 1)$

$y = \sin x$  の逆関数  $y = \arcsin x$

- 定義域： $-1 \leq x \leq 1$
- 値域： $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  (主値)
- 積分表示： $\arcsin x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

## 演習問題

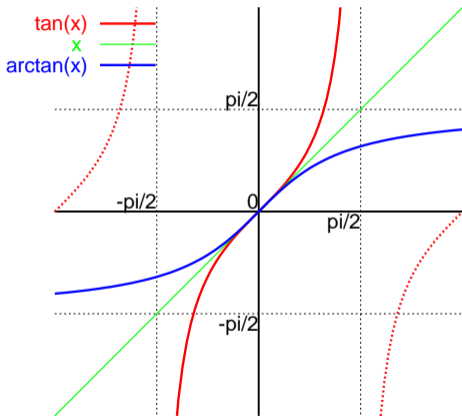
$\arcsin$  の時の真似をして、次の手順で

$y = \arctan x$  の **Taylor** 展開を求めよ

- (1)  $x = \tan y$  の満たす微分方程式を求める
- (2)  $\arctan x$  を積分で表す
- (3) 被積分関数を **Taylor** 展開し項別積分する



$y = \tan x$  の逆関数  $y = \arctan x$



$y = \tan x$  の逆関数  $y = \arctan x$

- 定義域：全実数  $x$
- 値域： $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  (主値)
- 積分表示： $\arctan x = \int_{t=0}^x \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

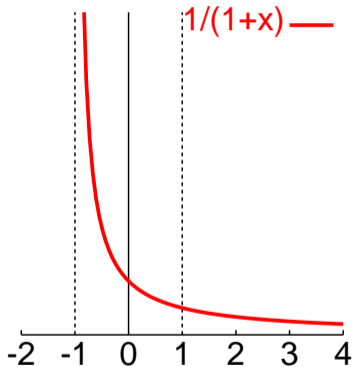
ところで、 $\arcsin x$ ,  $\arctan x$  とも、  
Taylor 展開の収束半径は 1 であった。

$\arcsin x$  は元々定義域が  $|x| \leq 1$  なので、  
別に不思議はないが、

$\arctan x$  は全実数に対して定義できて、  
一見  $|x| < 1$  に限る理由がないし、

被積分関数  $\frac{1}{1+t^2}$  にも別に変な所はない。

例： $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$



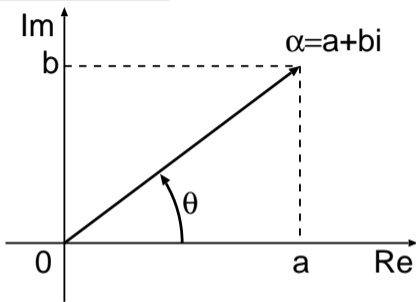
$x = -1$  で分母が 0  $\rightarrow$  元々そこまで

実は、複素数まで拡げて考えると、  
 $\arctan x$  の正体が顕れる !!

被積分関数  $\frac{1}{1+t^2}$  は  $t = \pm i$  で分母が 0 !!

やはり  $|x| = 1$  の所に越えられぬ障害があった  
( $|\pm i| = 1$ )

## 複素数の絶対値・偏角



- $|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$   
:  $\alpha$  の絶対値 (absolute value)
- $\arg \alpha = \theta$  :  $\alpha$  の偏角 (argument)
- $\alpha = |\alpha|(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

で、 $x$  を複素数にすると、

$e^x$  の方は当面は意味不明だが、

右辺の級数は四則演算と極限操作とだけなので

意味を持つ

$x$  が複素数の場合も、

$e^x$  を右辺の級数で定義してしまおう !!

( → 詳しくは「複素関数論」で )

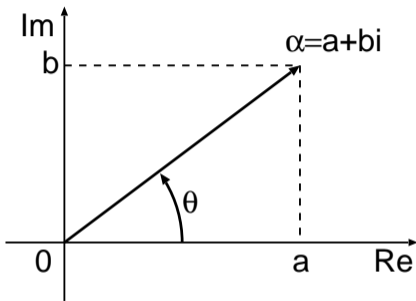
試しに、

$$\begin{aligned}e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) \\ &\quad + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x\end{aligned}$$

**Euler の公式** :  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$



## 複素数の極座標表示



$$\begin{cases} r := |\alpha| \\ \theta := \arg \alpha \end{cases}$$

とおくと、 $\alpha = re^{i\theta}$

:  $\alpha$  の極座標表示

## 三角関数を指数関数で表す

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

⇓

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

## 三角関数を指数関数で表す

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

これを使うと、

三角関数の諸性質は指数関数の性質に帰着 !!

加法定理 ← 指数法則

## 双曲線関数

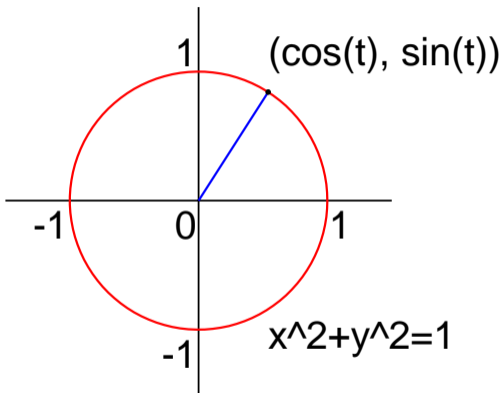
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- 三角関数と類似の性質を持つ
- 自然現象の記述にも現れる

$x^2 + y^2 = 1$  の媒介変数表示  $(\cos t, \sin t)$



$x^2 - y^2 = 1$  の媒介変数表示 ( $\cosh t, \sinh t$ )

