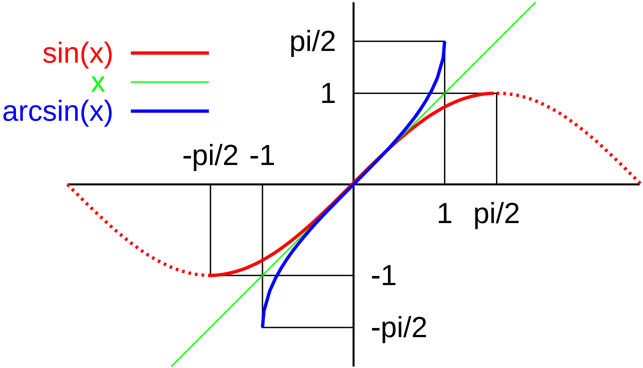
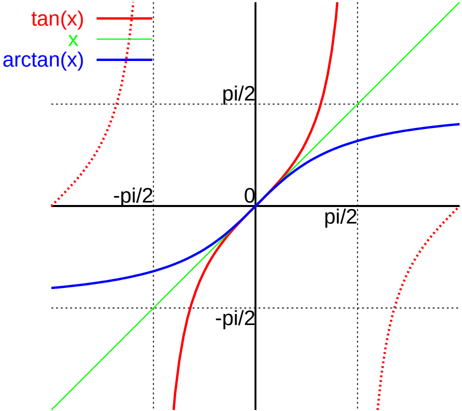
# $y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$



## $y = \sin x$ の逆関数 $y = \arcsin x$

- **定義域：** $-1 \leq x \leq 1$
- **値域：** $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ **（主値）**
- **積分表示：** $\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

## $y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$



## $y = \tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$

- **定義域：全実数** $x$
- **値域：**$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ **（主値）**
- **積分表示：**$\arctan x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

# 三角関数を指数関数で表す

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$
$$\Downarrow$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

## 三角関数を指数関数で表す

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

**これを使うと、**

**三角関数の諸性質は指数関数の性質に帰着 !!**

**加法定理 $\longleftarrow$ 指数法則**

# 双曲線関数

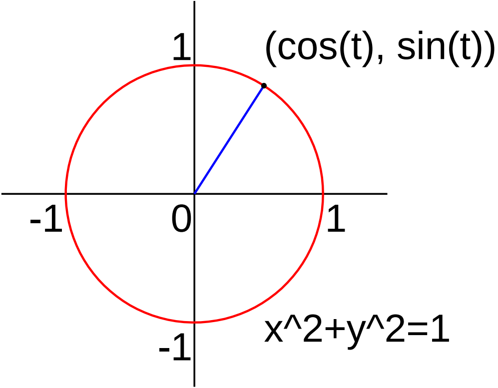
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

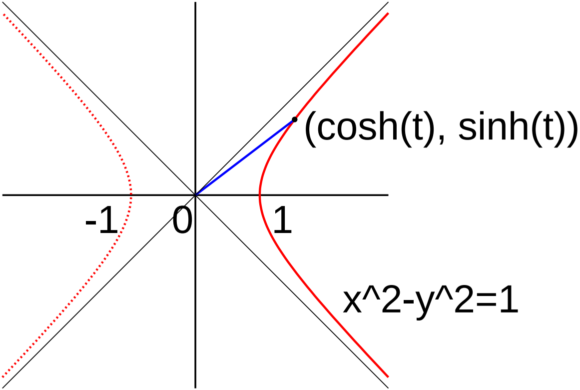
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- **三角関数と類似の性質を持つ**
- **自然現象の記述にも現れる**

## $x^2 + y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cos t, \sin t)$



## $x^2 - y^2 = 1$ の媒介変数表示 $(\cosh t, \sinh t)$



**さて、話は変わって、**

**本講義後半の主題は、**

**積分**

**である**

## 高校で習った積分

- **逆微分としての「原始関数」**
  $f(x) = F'(x)$ **となる** $F$ **を求める**

- **原始関数の区間両端での値の差としての**
  **「定積分」** $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **定積分は実は「面積」を表す**

# 積分・微分の発見

**歴史的には、実は順番が逆で、**
**積分の起源の方が微分よりも遥かに早い**

- **「積分」: 面積を求める手法の探求**
  **(エジプト・ギリシャ：2000 年以上前)**
- **「微分」: 物体の運動の数学的探求**
  **(Newton, Leibniz：17 世紀)**

**それぞれ別のものとして発見されたものが**
**実は密接に関連していた !!**
... **「微分積分学の基本定理」**

# 積分法

- **統一的な求積法としての「定積分」**
- **積分の上端を動かして、**
  **積分値を上端の関数とみる**

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ **:「定積分関数」**

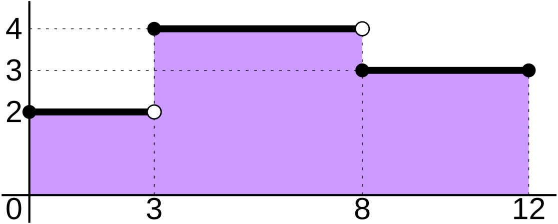
- **実は定積分関数を微分すると元の関数**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

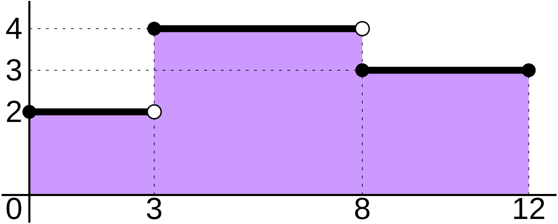
**「微分積分学の基本定理」**

## 積分の定式化

$$I = \int_0^{12} f(x)\,dx, \qquad f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 3) \\ 4 & (3 \leq x < 8) \\ 3 & (8 \leq x \leq 12) \end{cases}$$



# 積分の定式化




$$I = \int_0^{12} f(x)\,dx$$
$$= 2 \times (3-0) + 4 \times (8-3) + 3 \times (12-8).$$

**「積分」は「積和」である**

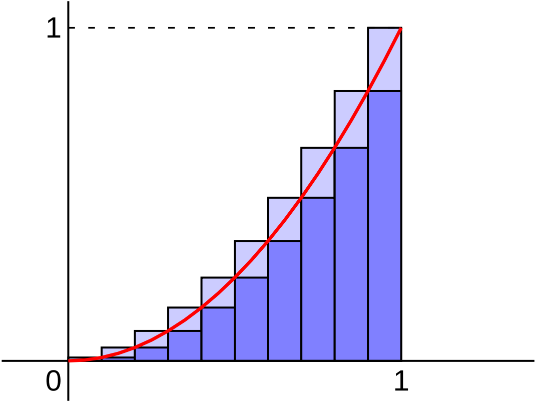
## 積分の定式化

**では、**

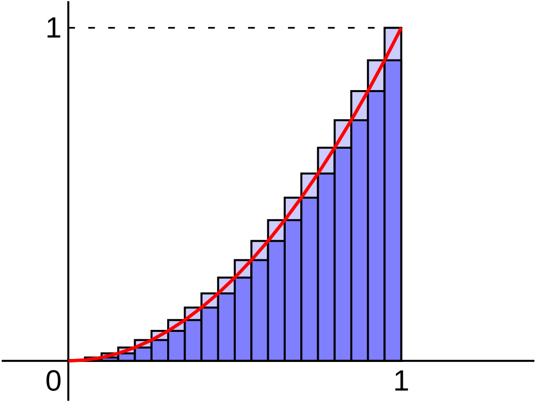
$$I = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = x^2$$

**はどう考えるか？**

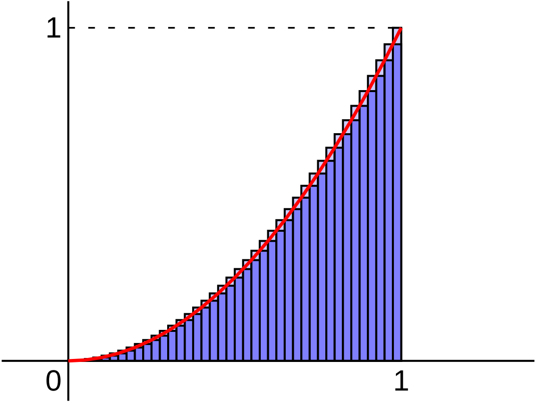
$$I = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = x^2$$



$$I = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad f(x) = x^2$$



## 演習問題

$f(x) = x^2$ の $[0, a]$ での定積分

$$I = \int_0^a f(x)dx$$

を、

$[0, a]$ での $y = x^2$ のグラフの下の部分

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le a, 0 \le y \le x^2\right\}$$

の面積として、

次の手順で上下から見積もることにより、
計算しよう。

$$I = \int_0^a f(x)dx$$

**分割** $\Delta_n : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ **を**

$n$ **等分な分割（即ち** $x_i = \dfrac{ia}{n}$**）とする。**

**(1) 各小区間** $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ **に対し、**

- **区間幅** $|I_i| := x_i - x_{i-1}$
- $I_i$ **での** $f(x)$ **の下限**
  $$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf\{f(x) | x \in I_i\}$$
- $I_i$ **での** $f(x)$ **の上限**
  $$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup\{f(x) | x \in I_i\}$$

## 上限・下限について（再掲）

**例：半開区間** $I = [0, 1) = \{x | 0 \leq x < 1\}$

$I$ **に最大値はないが、**
**どう見ても** $1$ **が "最大値みたいな値" である**

## 上限・下限について（再掲）

$1$ は最小の上界：

- $1$ が上界である：　$\forall x \in I : x \leq 1$
- $1$ より少しでも小さくしたら上界でない：

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in I : x > 1 - \varepsilon$$

“どんな（小さな）正の数 $\varepsilon$ についても
或る（うまい／まずい）$x \in I$ があって
$x$ が $1-\varepsilon$ を超える”

このことを、

$1$ が $I$ の**上限** (**supremum**) である

と言い、$\sup I = 1$ と書く

## 上限・下限について（再掲）

**一般に、**
**実数全体の集合** $\mathbb{R}$ **の部分集合** $S \subset \mathbb{R}$ **に対し、**
**実数** $a \in \mathbb{R}$ **が次を満たす**
**（即ち、**$a$ **が** $S$ **の最小の上界である）とき、**
$a$ **が** $S$ **の上限であるといい、**$a = \sup S$ **と書く：**

- $\forall x \in S : x \leq a$
  **（即ち、**$a$ **が** $S$ **の上界（の一つ）である）**

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in S : x > a - \varepsilon$
  **（即ち、**$a$ **より少しでも小さくしたら**
  $S$ **の上界でない）**

## (2) 面積の上下からの見積り

- $$s_{\Delta_n} := \sum_{i=1}^{n} m_i |I_i|$$
- $$S_{\Delta_n} := \sum_{i=1}^{n} M_i |I_i|$$

## (3) $n \longrightarrow \infty$ の極限

- $s := \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}$
- $S := \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}$

**任意の $n$ に対して**

$$s_{\Delta_n} \leq I \leq S_{\Delta_n}$$

**であることから、**

$$s \leq I \leq S$$

**である。**

**ここで、$s = S$ が成り立つなら、**

$$s = S = I$$

**となる !!**

## 積分の定式化

**どんなに細かく切っても、**
**その小区間内で定数になる訳ではないが、**
**上下から見積もることは出来るだろう**

**（下からの見積）$\leq$（面積）$\leq$（上からの見積）**
**もしあれば**

**細かく切れば、**
**上下からの見積もりが同じ値に近付くなら、**
**これを「面積（積分）」と呼んで良いだろう**

# 積分の定式化

**細かく切る方法は $n$ 等分が簡単そうだが、**
**これだけを考えるのでは、話がうまく進まない**

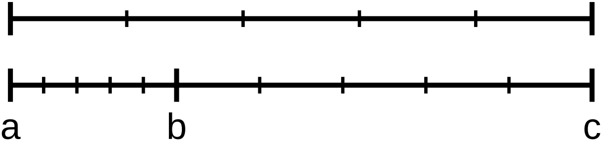
**例えば、基本的な等式**

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

**を示そうとすると** $\cdots$

## 積分の定式化

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$




**$n$ 等分点が食い違って比較し難い**

$\longrightarrow$ **予め「全ての分割」を考慮に入れて定義せよ !!**

**余談 $\cdots$ 現代数学の手法の特徴（の一つ）：**

**「苦労を先に買っておく」**

**定式化の段階で先に苦労をしておくと、**
**後で証明が楽になる**

**人間の都合でなく、**
**数学のものたちの気持ちに、**
**我々の気持ちを合わせる**

**その代わり、**
**人間には解り難くなることがあるけれど**

では、少々苦労はあるが、

# 「積分」の定義

をきちんとしましょう

# 積分の定義

**仮定：**

- **積分区間** $I = [a, b]$ **：有界閉区間**
- **被積分関数** $f$ **：** $I$ **で有界**
  **即ち、**
  $$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

# 「積分」の定義の方針

- **区間を分割せよ**
- **各区間で上下から見積もれ**
- **それを足し上げよ**
- **以上を全ての分割について考えよ**
- **上下からの見積が一致するか？**

# 積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ **：区間の分割**

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$ **：各小区間 (**$i = 1, \ldots, n$**)**

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$ **：区間幅**

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$ **：分割の最大幅**

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$$
$$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$$

**：区間** $I_i$ **に於ける** $f$ **の下限・上限**

## 積分の定義

**全ての分割 $\Delta$ を考えて、**

**下からの見積もりをどこまで上げられるか**

$$\longrightarrow\ s := \sup_{\Delta} s_{\Delta}$$ **：下積分**

**上からの見積もりをどこまで下げられるか**

$$\longrightarrow\ S := \inf_{\Delta} S_{\Delta}$$ **：上積分**

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

**一般に $s \leq S$ であるが、$s = S$ とは限らない !!**

## $s \lneq S$ となる例

$$I = [0, 1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x : \textbf{有理数}) \\ 0 & (x : \textbf{無理数}) \end{cases}$$

**任意の分割 $\Delta$ に対し、**

$$s_\Delta = 0, \quad S_\Delta = 1$$

**従って、**

$$s = 0 \lneq S = 1$$

## 積分の定義

$s = S$ のとき、これが "面積" と呼ぶべき唯一の値

この時、

$f$ は $I$ で**積分可能 (integrable)**

と言い、

この値を

$$\int_I f(x)\,dx \qquad \left(\text{または} \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

と書いて、

$f$ の $I$ に於ける**定積分 (definite integral)**

と呼ぶ

**例：**

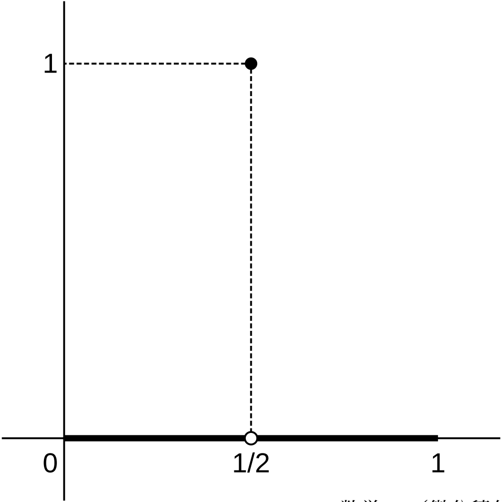
$$I = [0,1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\textbf{それ以外}) \end{cases}$$

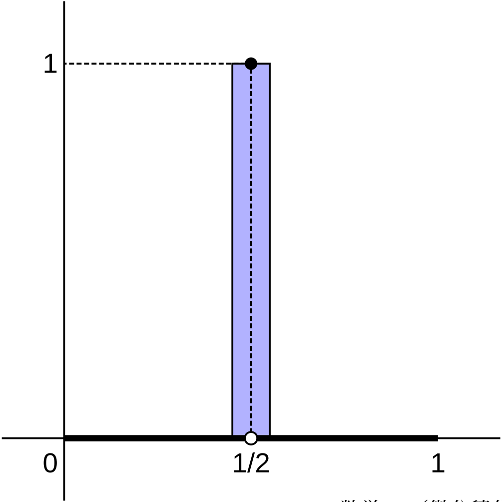
**任意の分割 $\Delta$ に対し、**$s_\Delta = 0$

**一方、**$\forall \varepsilon > 0$ **に対し、**$S_\Delta \leq \varepsilon$ **なる分割 $\Delta$ が存在**

**従って、**

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x)dx$$


1
0
1/2
1


1
0
1/2
1