本講義後半の主題は、

積分

である

高校で習った積分

- **逆微分としての「原始関数」**
  $f(x) = F'(x)$ **となる** F **を求める**

- **原始関数の区間両端での値の差としての**
  「定積分」 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

- **定積分は実は「面積」を表す**

積分・微分の発見

歴史的には、実は順番が逆で、
積分の起源の方が微分よりも遥かに早い

- **「積分」：面積を求める手法の探求**
  （エジプト・ギリシャ：2000 年以上前）

- **「微分」：物体の運動の数学的探求**
  （Newton, Leibniz：17 世紀）

それぞれ別のものとして発見されたものが
実は密接に関連していた !!
… 「微分積分学の基本定理」

積分法

- **統一的な求積法としての「定積分」**
- **積分の上端を動かして、積分値を上端の関数とみる**

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ **:「定積分関数」**

- **実は定積分関数を微分すると元の関数**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

積分の定義

仮定：

- **積分区間** $I = [a, b]$ **：有界閉区間**
- **被積分関数** $f : I$ **で有界**
  即ち、
  $$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

「積分」の定義の方針

- **区間を分割せよ**
- **各区間で上下から見積もれ**
- **それを足し上げよ**
- **以上を全ての分割について考えよ**
- **上下からの見積が一致するか？**

積分の定義

$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ **：区間の分割**

$I_i := [x_{i-1}, x_i]$ **：各小区間 (**$i = 1, \ldots, n$**)**

$|I_i| := x_i - x_{i-1}$ **：区間幅**

$\delta(\Delta) := \max_i |I_i|$ **：分割の最大幅**

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I_i\}$$
$$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I_i\}$$

：区間 I_i **に於ける** f **の下限・上限**

積分の定義

$$s_\Delta := \sum_{i=1}^{n} m_i |I_i|$$

$$S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} M_i |I_i|$$

：分割 Δ に関する上下からの見積もり

$\longrightarrow$

$$s_\Delta \leq \text{“面積”} \leq S_\Delta$$

分割 Δ を色々考えて、見積もりを精密にせよ。

積分の定義

全ての分割 Δ を考えて、

下からの見積もりをどこまで上げられるか

$$\longrightarrow\ s := \sup_{\Delta} s_{\Delta}$$ **：下積分**

上からの見積もりをどこまで下げられるか

$$\longrightarrow\ S := \inf_{\Delta} S_{\Delta}$$ **：上積分**

$$s \leq \text{“面積”} \leq S$$

一般に $s \leq S$ であるが、$s = S$ とは限らない !!

積分の定義

$s = S$ のとき、これが "面積" と呼ぶべき唯一の値

この時、

f は I で**積分可能** (**integrable**)

と言い、

この値を

$$\int_I f(x)\,dx \quad \left(\text{または} \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

と書いて、

f の I に於ける**定積分** (**definite integral**)

と呼ぶ

例：

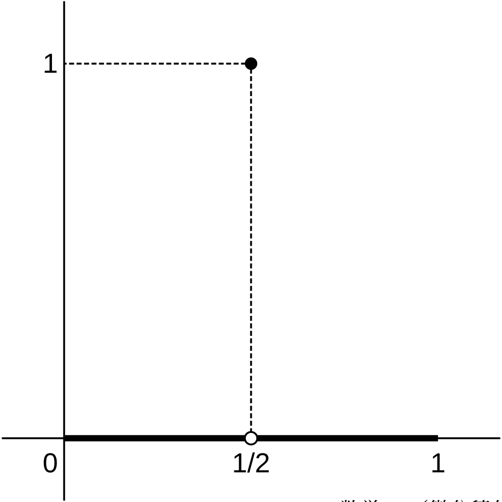
$$I = [0,1], \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\textbf{それ以外}) \end{cases}$$

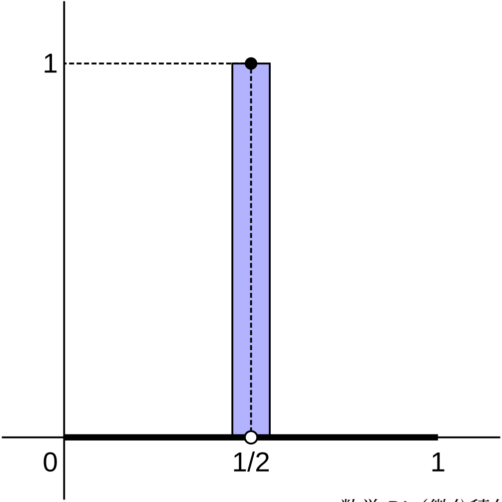
任意の分割 Δ に対し、$s_\Delta = 0$

一方、$\forall \varepsilon > 0$ **に対し、**$S_\Delta \leq \varepsilon$ **なる分割** Δ **が存在**

従って、

$$s = S = 0 = \int_0^1 f(x)dx$$


1
0
1/2
1


1
0
1/2
1

任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$ **とし、**

区間 $[a, b]$ **に於ける下積分を** $s(a, b)$ **と書くと、**

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

任意の分割を考えたので、
次のような事実の証明が簡明になった

$a < c < b$ **とし、**

区間 $[a, b]$ **に於ける下積分を** $s(a, b)$ **と書くと、**

$$s(a, b) = s(a, c) + s(c, b)$$

同様に、

$$S(a, b) = S(a, c) + S(c, b)$$

$$s(a,b) = s(a,c) + s(c,b)$$
$$S(a,b) = S(a,c) + S(c,b)$$

従って、

f **が 区間** $[a,c],[c,b]$ **で積分可能**
$\Longrightarrow f$ **は区間** $[a,b]$ **でも積分可能で、**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ところで、積分を定義するのに
全ての分割を考えることにしたということは、

- （前回の計算例のように）
  n 等分だけを考えたのでは不充分なのか？

- 実際に計算することは不可能なのではないか？

$\longrightarrow$ 実は大丈夫で、次の定理が成り立つ

ところで、積分を定義するのに
全ての分割を考えることにしたということは、

- **（前回の計算例のように）**
  n 等分だけを考えたのでは不充分なのか？

- **実際に計算することは不可能なのではないか？**

$\longrightarrow$ **実は大丈夫で、次の定理が成り立つ**

ところで、積分を定義するのに
全ての分割を考えることにしたということは、

- **（前回の計算例のように）**
  n **等分だけを考えたのでは不充分なのか？**

- **実際に計算することは不可能なのではないか？**

$\longrightarrow$ **実は大丈夫で、次の定理が成り立つ**

Darboux の定理：

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ **：分割の列に対し、**

$$\delta(\Delta_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$$

（証明略）

つまり、実際の計算は、
$\delta(\Delta_n) \to 0$ **となるような分割の列** $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$
（で計算し易いもの）を一揃い考えれば充分

Darboux の定理：

$(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ **：分割の列に対し、**

$$\delta(\Delta_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = s, \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = S$$

（証明略）

つまり、実際の計算は、

$\delta(\Delta_n) \to 0$ **となるような分割の列** $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$

（で計算し易いもの）を一揃い考えれば充分

定積分の値の見当がついているときには、次を利用することも出来る

$$\int_a^b f(x)\,dx = I$$

$$\Updownarrow$$

任意の $\varepsilon > 0$ **に対し、**
$[a, b]$ **の或る分割** $\Delta = \Delta_\varepsilon$ **が存在して、**

$$I - \varepsilon \le s_\Delta, \qquad S_\Delta \le I + \varepsilon$$

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

さて、先の例のように、
積分にとって、不連続性は致命的ではない

逆に言うと、連続だからと言って、
積分可能かどうかは自明ではない

しかし、幸いな（偉大な）ことに、実は、

閉区間で連続な関数は積分可能である !!

定理（連続関数の積分可能性）：

f：閉区間 $I = [a, b]$ で連続
（このとき自動的に有界）

$$\Downarrow$$

f：I に於いて積分可能

$s(x,y)$：区間 $[x,y]$ に於ける下積分

特に、$s(x) := s(a,x)$ と書くとき

主張：

$s(x)$：$[a,b]$ で微分可能で、

$$s'(x) = f(x)$$

即ち、

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall h :$$

$$0 < |h| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

$s(x,y)$：**区間** $[x,y]$ **に於ける下積分**

特に、 $s(x) := s(a,x)$ **と書くとき**

主張：

$s(x)$：$[a,b]$ **で微分可能で、**

$$s'(x) = f(x)$$

即ち、

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall h :$$

$$0 < |h| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

定理：

f：**閉区間** $I = [a, b]$ **で連続**
（このとき自動的に有界）

$$\Downarrow$$

f：I **に於いて積分可能**

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t)dt$$

（上端 x **の関数で、定積分関数と呼ぶ）**
が f **の原始関数になっていることが判る**

定理：

f：閉区間 $I = [a, b]$ で連続
（このとき自動的に有界）

$$\Downarrow$$

$f : I$ に於いて積分可能

更に、今の証明を振り返ると、

$$S(a, x) = s(a, x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

（上端 x の関数で、**定積分関数**と呼ぶ）
が f の**原始関数**になっていることが判る

微分積分学の基本定理

f：**閉区間** $I = [a, b]$ **で連続のとき**

- $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

  即ち、$\displaystyle F(x) = \int_a^x f(t)dt$ **とおくと、**

  F **は** f **の原始関数（の一つ）**

- F **を** f **の原始関数（の一つ）とすると、**

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない（下端を指定しない）とき、

単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、

f **の不定積分 (indefinite integral) と呼ぶ**

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
（微分したら同じ）なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理
f：連続のとき、　不定積分 = 原始関数

$\longrightarrow$ 原始関数（逆微分）を知れば積分が計算できる

$\longrightarrow$ 計算は今までに馴染みの
諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、

定数だけ違ってもやはり原始関数

（微分したら同じ）なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理 f：**連続のとき、　不定積分 $\equiv$ 原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数（逆微分）を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**

諸公式・手法によれば良い

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
（微分したら同じ）なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理
f**：連続のとき、　不定積分** $=$ **原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数（逆微分）を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**
諸公式・手法によれば良い