期末試験のお知らせ

7月30日（月） 13:30 〜 15:00

12-502教室 （ここじゃない!!）

- 積分を巡る諸々
  （最終回 (7/23) の講義内容まで）
- 中間試験前の内容も一部関連
- 学生証必携
- 「積分公式集」は配布する

積分法

- **統一的な求積法としての「定積分」**
- **積分の上端を動かして、**
  積分値を上端の関数とみる

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$ **:「定積分関数」**

- **実は定積分関数を微分すると元の関数**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

「微分積分学の基本定理」

積分の定義

仮定：

- **積分区間** $I = [a, b]$ **：有界閉区間**
- **被積分関数** f **：** I **で有界**
  即ち、
  $$\exists m, M : \forall x \in I : m \leq f(x) \leq M$$

定理：

f：閉区間 $I = [a, b]$ で連続
（このとき自動的に有界）

$$\Downarrow$$

f：I に於いて積分可能

更に、その証明を振り返ると、

定積分関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

が f の**原始関数**になっていることが判る

微分積分学の基本定理

f：閉区間 $I = [a, b]$ で連続のとき

- $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$

  即ち、$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とおくと、

  F は f の原始関数（の一つ）

- F を f の原始関数（の一つ）とすると、

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

尚、下端 a を取り替えても、

定積分関数は定数の差しかない：

$$\int_a^x f(t)dt - \int_{a'}^x f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt$$

その差を気にしない（下端を指定しない）とき、

単に

$$\int f(x)dx$$

と書き、

f **の不定積分 (indefinite integral) と呼ぶ**

一方、原始関数も、
定数だけ違ってもやはり原始関数
（微分したら同じ）なので、

普通は定数の差を気にしない

微分積分学の基本定理 f**：連続のとき、　不定積分 $\equiv$ 原始関数**

$\longrightarrow$ **原始関数（逆微分）を知れば積分が計算できる**

$\longrightarrow$ **計算は今までに馴染みの**
諸公式・手法によれば良い

ところで、前に見た $\arcsin x = \displaystyle\int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ で、

$x = 1$ とすれば $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$ だから、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない !!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty \quad (x \to 1-0)$$

ところで、前に見た $\arcsin x = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ **で、**

$x = 1$ **とすれば** $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ **だから、**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

となりそうだが、

区間端点 1 では被積分関数が定義されない !!

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty \quad (x \to 1-0)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- **積分区間が半開区間** $I = [0, 1) = \{x | 0 \le x < 1\}$
- **しかもそこで被積分関数** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **が非有界**

このような場合に対しても
積分の定義を拡張しておこう

$\longrightarrow$ **広義積分・変格積分 (improper integral)**

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

と考えたいが、

- **積分区間が半開区間** $I = [0,1) = \{x \mid 0 \le x < 1\}$
- **しかもそこで被積分関数** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **が非有界**

このような場合に対しても

積分の定義を拡張しておこう

$\longrightarrow$ **広義積分・変格積分 (improper integral)**

広義積分・変格積分 (improper integral)

- **区間が有界で、端点で関数が非有界**
  例：$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$

- **区間が非有界（無限区間）**
  例：$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

$\longrightarrow$ **共に、収束・発散の判定が重要**

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

f： $[a, b) = \{x | a \le x < b\}$ で定義され、
$x = b$ の近くで非有界だが、
任意の（どんな小さい） $\varepsilon > 0$ に対しても、
$[a, b - \varepsilon] = \{x | a \le x \le b - \varepsilon\}$ で
有界かつ積分可能

とするとき、各 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

が定義される

区間が有界で、端点で関数が非有界の場合

この状況で、

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a, b)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

と書く（広義積分が収束するとも言う）

区間が非有界（無限区間）な場合

f： $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ で定義され、
任意の（どんな大きい） $M > a$ に対しても、
$[a, M] = \{x \mid a \leq x \leq M\}$ で
有界かつ積分可能

とすると、

$$\int_a^M f(x)dx$$

が定義される

区間が非有界（無限区間）な場合

この状況で、

$$\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

が存在するとき、

f **は** $[a,+\infty)$ **で広義積分可能と言い、**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

と書く（広義積分が収束するとも言う）

収束する広義積分の例

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

も同様

収束する広義積分の例

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

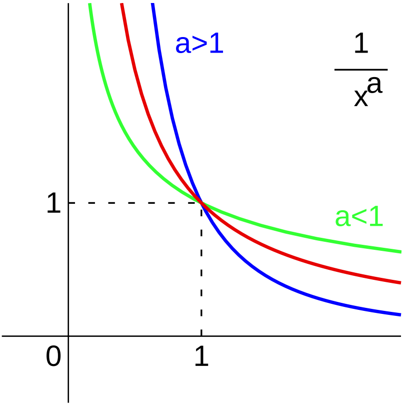
も同様

広義積分の収束判定（の例）

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx : \begin{cases} a > 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ a \leq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^a} dx : \begin{cases} a < 1 \Longrightarrow \textbf{収束} \\ a \geq 1 \Longrightarrow \textbf{発散} \end{cases}$$

広義積分の収束判定（の例）



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$$

$a > 1 \Longrightarrow$ **収束**

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^a}\,dx$$

$a < 1 \Longrightarrow$ **収束**

広義積分の収束判定（の例）

- $\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \dfrac{C}{x^{1+\varepsilon}}$
$$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$$ **：収束**

- $\exists \varepsilon > 0, \exists C > 0 : |f(x)| < \dfrac{C}{x^{1-\varepsilon}}$
$$\Longrightarrow \int_0^{1} f(x)dx$$ **：収束**

注意：$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ **は収束するとは言わない**

$\longrightarrow [-1,0)$ **と** $(0,1]$ **とに分けて別々に考える：**

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = -\log\varepsilon \longrightarrow +\infty \quad (\varepsilon \to +0)$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'}\frac{dx}{x} = \log\varepsilon' \longrightarrow -\infty \quad (\varepsilon' \to +0)$$

なので、$\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x},\ \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ **はどちらも収束しない**

広義積分で定義される関数の例

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

：Γ 関数

（ガンマ関数）

- **広義積分は** $s > 0$ **で収束**
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$