**今日の話題：**

# 3 次方程式・4 次方程式の一般解法（解の公式）

**って知ってますか？**

⟶ **方程式の解法探求の歴史**

⟶ **まず今までに習った数学（算数）を振り返ろう（人間と数学の歴史を振り返る）**

今日の話題：

# 3 次方程式・4 次方程式の一般解法（解の公式）

って知ってますか？

⟶ 方程式の解法探求の歴史

⟶ まず今までに習った数学（算数）を振り返ろう（人間と数学の歴史を振り返る）

**今日の話題：**

# 3 次方程式・4 次方程式の一般解法（解の公式）

**って知ってますか？**

$\longrightarrow$ **方程式の解法探求の歴史**

$\longrightarrow$ **まず今までに習った数学（算数）を振り返ろう（人間と数学の歴史を振り返る）**

## 小学校：

- 自然数（正の整数）の＋×
- −は出来ない時がある
- ÷は商と余りとを求める（整除）
- 分数を用いた÷（正の有理数）
- 小数（近似値・正の実数）

**中学・高校：**

- **正負の数の四則（＋－×÷）**
- **文字式（多項式）の＋－×**
- **÷は分数式（有理式）として**
- 1 **変数多項式の整除（商と余り）**
- **数の－÷** $\longrightarrow$ 1 **次方程式**
- 2 **次方程式の根の公式**
- **簡単な連立方程式**
- 3 **次以上は因数分解出来れば解ける**

## ところで ···

# 大学で数学を習ったら

# 何が新しく出来るようになる？

**中学・高校：**

- **正負の数の四則（＋－×÷）**
- **文字式（多項式）の＋－×**
- **÷は分数式（有理式）として**
- **1 変数多項式の整除（商と余り）**
- **数の－÷ $\longrightarrow$ 1 次方程式**
- **2 次方程式の根の公式**
- **簡単な連立方程式**
- **3 次以上は因数分解出来れば解ける**

**多変数多項式の割り算（余りを求める）**

$\Downarrow$

**Gröbner 基底**

**（広中-Buchberger の algorithm）**

**多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を組織的に与えるアルゴリズム**

**連立方程式 $\longrightarrow$（一般には高次の）1 変数方程式へ（変数消去）**

ここでは、

# 3 次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

# 2 次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた
（紀元前 2000 年頃 !! 今と同じ平方完成の方法）

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ（非整数も OK）
- （正数の範囲の）引き算は OK
- 解も正の数のみ

# 2 次方程式の根の公式

**考えている「数」は正の数のみ**

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた** ($a > 0, b > 0$)

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

**しかし、分数・平方根の概念はあった**

**（$\longrightarrow$ 負の数は人間にとって考え難い ?! ）**

## 2 次方程式の根の公式

**考えている「数」は正の数のみ**

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた (**$a > 0, b > 0$**)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

**しかし、分数・平方根の概念はあった**

**（$\longrightarrow$ 負の数は人間にとって考え難い?!）**

# 2 次方程式の根の公式

**考えている「数」は正の数のみ**

$\longrightarrow$ **以下は別個に扱われた ($a > 0, b > 0$)**

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

**しかし、分数・平方根の概念はあった**

**（$\longrightarrow$ 負の数は人間にとって考え難い ?! ）**

## 3 次方程式の解法（根の公式）は？

「**根の公式**」とは：

係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算（小数）

# 3 次方程式の解法（根の公式）は？

「根の公式」とは：
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算（小数）

# 3 次方程式の解法（根の公式）は？

「根の公式」とは：
係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算（小数）

**2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、**
**遂に 3 次方程式の根の公式が発見された !!**

**16 世紀前半　(del Ferro, Fontana, Cardano)**

- **代数の記号法が進歩しつつある時期**
  **（但し、まだ略記法に近い）**
- **負の数はまだ半人前**
- **立方完成して、さあそれからどうする**

**では、**

**この解法を現代の記号法で見ていこう**

**（以下、暫く板書で）**

# $3$ 次方程式の根の公式（Fontana-Cardano の公式）

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$ の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

（但し、$3$ 乗根は掛けて $-\frac{p}{3}$ となるように取る）

$3$ 乗根の 1 組を $u, v$ とすると、($\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

## 演習問題

3 次方程式 $X^3 - 21X + 20 = 0$ を、

(1) 因数分解を見付けて解け。

(2) Fontana-Cardano の方法を辿って解いてみよ。
また両者の結果を比べよ。

# 4 次方程式の解法の発見（16 世紀前半，Ferrari）

3 次方程式の解法から間もなく

- 時代が熟していた？
  （考察の蓄積・記号法の発達など）

- 難しさの違いが少ない？
  $\longrightarrow$ “難しさ” ってどう計る？

（以下、暫く板書で）

# 4 次方程式の解法の発見（16 世紀前半，Ferrari）

3 次方程式の解法から間もなく

- 時代が熟していた？
  （考察の蓄積・記号法の発達など）

- 難しさの違いが少ない？
  $\longrightarrow$ "難しさ" ってどう計る？

（以下、暫く板書で）

## 4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

**補助変数 $t$ を導入して、**

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

**の右辺が完全平方になる**

$$\Updownarrow$$

$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

**これは $t$ の 3 次方程式**

**（Fontana-Cardano の公式で解ける !! ）**

**$\longrightarrow$ この $t$ を用いて解く**

## 4 次多項式の 3 次分解式

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

：3 次**分解式**（**解核多項式**, **resolvent**）

$T := 2t$ とおいて、

$$R(T) := -g\left(\frac{T}{2}\right)$$
$$= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr)$$

$R(T)$ が因数分解できる

$\Longleftrightarrow$ $f(X)$ の根が 3 乗根を用いずに表せる

## $4$ 次多項式の $3$ 次分解式

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

：$3$ 次**分解式**（**解核多項式**, **resolvent**）

$T := 2t$ とおいて、

$$\begin{aligned} R(T) :&= -g\left(\frac{T}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

$R(T)$ が因数分解できる

$\iff f(X)$ の根が $3$ 乗根を用いずに表せる

# 演習問題

$4$ 次方程式 $X^4 - 20X^2 + 32 = 0$ を、

(1) $Y = X^2$ と置いて解け。

(2) Ferrari の方法を辿って
$3$ 次分解式の根 $t$ を求め、
それぞれの $t$ の値を用いて解いてみよ。
また、それぞれの結果を比べよ。