

今日の話題：

## 3 次方程式・4 次方程式の一般解法 ( 解の公式 )

って知ってますか？

→ 方程式の解法探求の歴史

→ まず今までに習った数学（算数）を振り返ろう  
( 人間と数学の歴史を振り返る )

## 小学校：

- 自然数（正の整数）の  $+$   $\times$
- $-$  は出来ない時がある
- $\div$  は商と余りとを求める（整除）
- 分数を用いた  $\div$ （正の有理数）
- 小数（近似値・正の実数）

## 中学・高校：

- 正負の数の四則（ $+$   $-$   $\times$   $\div$ ）
- 文字式（多項式）の $+$   $-$   $\times$
- $\div$ は分数式（有理式）として
- 1変数多項式の整除（商と余り）
- 数の $-$   $\div$   $\longrightarrow$  1次方程式
- 2次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3次以上は因数分解出来れば解ける

ところで …

大学で数学を習ったら

何が新しく出来るようになる？

## 中学・高校：

- 正負の数の四則（ $+$   $-$   $\times$   $\div$ ）
- 文字式（多項式）の $+$   $-$   $\times$
- $\div$ は分数式（有理式）として
- 1変数多項式の整除（商と余り）
- 数の $-$   $\div$   $\longrightarrow$  1次方程式
- 2次方程式の根の公式
- 簡単な連立方程式
- 3次以上は因数分解出来れば解ける

多変数多項式の割り算（余りを求める）



**Gröbner 基底**

（広中-Buchberger の algorithm）

多変数多項式環の ideal の標準的な生成系を  
組織的に与えるアルゴリズム

連立方程式  $\longrightarrow$  （一般には高次の）1 変数方程式へ  
（変数消去）

ここでは、

## 3次以上の方程式の根の公式

を考えよう !!

## 2次方程式の根の公式

古代バビロニアで既に知られていた  
(紀元前 2000 年頃 !! 今と同じ平方完成の方法)

但し、

- 問題も解法も言葉で表された
- 係数は正の数のみ (非整数も OK)
- (正数の範囲の) 引き算は OK
- 解も正の数のみ



## 2次方程式の根の公式

考えている「数」は正の数のみ

→ 以下は別個に扱われた ( $a > 0, b > 0$ )

- $X^2 + aX = b$
- $X^2 = aX + b$
- $X^2 + b = aX$

しかし、分数・平方根の概念はあった

( → 負の数は人間にとって考え難い?! )

### 3次方程式の解法（根の公式）は？

「**根の公式**」とは：

係数に

- 四則と冪根とを
- 有限回だけ

施して解を表す

文化的背景が数学の問題意識に影響？

参考：

- 作図問題：定規とコンパス
- 中国：解の近似計算（小数）

2 次方程式の解法から遥か 3500 年の後、  
遂に 3 次方程式の根の公式が発見された !!

16 世紀前半 (del Ferro, Fontana, Cardano)

- 代数の記号法が進歩しつつある時期  
(但し、まだ略記法に近い)
- 負の数はまだ半人前
- 立方完成して、さあそれからどうする

では、

この解法を現代の記号法で見たいこう

(以下、暫く板書で)

### 3 次方程式の根の公式 (Fontana-Cardano の公式)

$f(X) = X^3 + pX + q = 0$  の根は、

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

(但し、3乗根は掛けて  $-\frac{p}{3}$  となるように取る)

3乗根の1組を  $u, v$  とすると、( $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ )

$$X = u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v$$

## 演習問題

3 次方程式  $X^3 - 21X + 20 = 0$  を、

(1) 因数分解を見付けて解け。

(2) Fontana-Cardano の方法を辿って  
解いてみよ。  
また両者の結果を比べよ。

## 4 次方程式の解法の発見 (16 世紀前半, Ferrari)

### 3 次方程式の解法から間もなく

- 時代が熟していた？  
( 考察の蓄積・記号法の発達など )
- 難しさの違いが少ない？  
→ “難しさ” ってどう計る？

( 以下、暫く板書で )

## 4 次方程式の Ferrari の解法

$$f(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

補助変数  $t$  を導入して、

$$(X^2 + t)^2 = (2t - p)X^2 - qX + (t^2 - r)$$

の右辺が完全平方になる



$$q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$$

これは  $t$  の 3 次方程式

( **Fontana-Cardano** の公式で解ける !! )

→ この  $t$  を用いて解く



## 4 次多項式の 3 次分解式

$$g(t) = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r)$$

: 3 次分解式 ( 解核多項式, **resolvent** )

$T := 2t$  において、

$$\begin{aligned} R(T) &:= -g\left(\frac{T}{2}\right) \\ &= T^3 - pT^2 - 4rT - (q^2 - 4pr) \end{aligned}$$

$R(T)$  が因数分解できる

$\iff f(X)$  の根が 3 乗根を用いずに表せる

## 演習問題

4 次方程式  $X^4 - 20X^2 + 32 = 0$  を、

(1)  $Y = X^2$  と置いて解け。

(2) Ferrari の方法を辿って

3 次分解式の根  $t$  を求め、  
それぞれの  $t$  の値を用いて解いてみよ。  
また、それぞれの結果を比べよ。