

本授業で取り上げた内容のまとめ及び補足を兼ねて、演習問題として挙げておく。問題番号に付いた A から D までの記号のついでの大まかな目安としては、

- A：定義の確認または基本的な概念の理解として身に付けてもらいたいもの
- B：基本的な例または証明として期末試験の中心となる程度のもの
- C：期末試験の内容としてはやや難しい部類のもの（難しい訳ではないが面倒というようなものも含む）
- D：期末試験の内容としてはかなり難しいか、引続きの学修のために挙げるものという感じである。

## 1. 同値関係・類別・商集合

問 1-1A. 集合  $X$  上の関係  $\sim$  について

- (1)  $\sim$  が同値関係であることの定義を述べよ。
- (2)  $X$  上の同値関係  $\sim$  に関する  $x \in X$  の同値類とは何か。
- (3)  $X$  上の同値関係  $\sim$  によって定まる商集合  $X/\sim$  とは何か。

問 1-2B. 実数全体の集合  $R$  上に次で定める関係  $\sim$  は同値関係であるか。（同値関係であるならばそのことを示し、そうでないならば同値関係が満たすべき条件のうち何が満たされないかを反例を挙げて指摘せよ。）

- (1)  $a \sim b \iff b - a \in \mathbb{Z}$
- (2)  $a \sim b \iff a \leq b$
- (3)  $a \sim b \iff b - a = 1$
- (4)  $a \sim b \iff |b - a| \leq 0.001$

問 1-3B. 上問で  $\sim$  が同値関係であるものについて、 $R/\sim$  は“何”の集合だと考えられるか。

## 2. $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ へ

本節では、整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  についての基本的な性質（演算・大小関係など）については既知（既に基礎付け済み）であるが、有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  についてはここで構成するまで知らない、という立場で考えよ。

問 2-1B. 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  から有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  は次のように構成できる。

- (1)  $X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  上に次で定める関係  $\sim$  は同値関係である：
  - $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X$  に対し、 $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 b_2 = a_2 b_1$ $(a, b) \in X$  の  $\sim$  に関する同値類を  $a/b$  と書き、 $X$  の  $\sim$  による商集合  $X/\sim$  を  $\mathbb{Q}$  と書く。
- (2)  $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  を  $\iota(a) := a/1$  で定めると、 $\iota$  は単射。（通常  $a \in \mathbb{Z}$  と  $\iota(a) \in \mathbb{Q}$  とを同一視して  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  と見る。）

問 2-2B.  $a/b \in \mathbb{Q}$  に対し、 $a/b = 0/1 \iff a = 0$  および  $a/b = 1/1 \iff a = b$  が成り立つ。より一般に、 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $b, c \neq 0$  に対し、 $ac/bc = a/b$  が成り立つ（約分が出来る）。

問 2-3B. 上問で構成した  $\mathbb{Q}$  には自然に加法が定まり、良い性質を持つ。即ち：

- (1)  $a_1/b_1, a_2/b_2 \in \mathbb{Q}$  に対し、次で  $a_1/b_1 + a_2/b_2 \in \mathbb{Q}$  を定めると well-defined である：
  - $a_1/b_1 + a_2/b_2 := (a_1 b_2 + a_2 b_1)/b_1 b_2$
 （ここでの well-defined とは、 $(a_1 b_2 + a_2 b_1)/b_1 b_2 \in \mathbb{Q}$  であるということもあるが、主に）「代表元の取り方に依らずに定まる」、即ち、 $(a_1, b_1) \sim (a'_1, b'_1), (a_2, b_2) \sim (a'_2, b'_2) \implies (a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2) \sim (a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1, b'_1 b'_2)$  ということ。これを示す。）
- (2) 上で定めた  $\mathbb{Q}$  上の加法  $+$  は次を満たす：
  - (a)  $\forall x, y \in \mathbb{Q} : x + y = y + x$
  - (b)  $\forall x, y, z \in \mathbb{Q} : (x + y) + z = x + (y + z)$
  - (c)  $\forall x \in \mathbb{Q} : 0 + x = x, x + 0 = x$ （ここでの  $0$  は  $\iota(0)$  のこと）
  - (d)  $\forall x \in \mathbb{Q} : \exists y \in \mathbb{Q} : x + y = 0, y + x = 0$
- (3)  $\mathbb{Z}$  上の加法  $+$  との間で次を満たす：
  - $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$

問 2-4B. 乗法についても、 $Q$  には自然に乗法が定まり、同様の良い性質を持つ。

- (1)  $Q$  の乗法  $\cdot$  をしかるべく定義せよ。
- (2) このとき  $Q$  上の乗法  $\cdot$  は次を満たす：
  - (a)  $\forall x, y \in Q : x \cdot y = y \cdot x$
  - (b)  $\forall x, y, z \in Q : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  - (c)  $\forall x \in Q : 1 \cdot x = x, x \cdot 1 = x$  (ここでの 1 は  $\iota(1)$  のこと)
  - (d)  $\forall x, y, z \in Q : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
  - (e)  $\forall x \in Q \setminus \{0\} : \exists y \in Q : x \cdot y = 1, y \cdot x = 1$
- (3)  $Z$  上の乗法  $\cdot$  との間で次を満たす：
  - $\forall a, b \in Z : \iota(a \cdot b) = \iota(a) \cdot \iota(b)$

問 2-5B.  $Q$  には自然に大小関係  $<$  が定まり、良い性質を持つ。即ち：

- (1)  $Q$  上に関係  $<$  を次で定めると well-defined である：
  - $a_1/b_1, a_2/b_2 \in Q$  に対し、  
 $a_1/b_1 < a_2/b_2 \iff (b_1 b_2 > 0 \text{ かつ } a_1 b_2 < a_2 b_1)$  または  $(b_1 b_2 < 0 \text{ かつ } a_1 b_2 > a_2 b_1)$   
 (また、便利のために関係  $>$  を  $x > y \iff y < x$  で定めておく。)
- (2) 上で定めた  $Q$  上の関係  $<$  は次を満たす：
  - (a)  $\forall x, y \in Q$  に対し  $x < y, x = y, x > y$  のうち一つ、かつ一つのみが成り立つ。
  - (b)  $\forall x, y, z \in Q : x < y, y < z \implies x < z$
- (3)  $Q$  上の関係  $<$  は次を満たす ( $Q$  上の演算と同調する)：
  - (a)  $\forall x, y, z \in Q : x < y \implies x + z < y + z$
  - (b)  $\forall x, y, z \in Q : x < y, 0 < z \implies x \cdot z < y \cdot z$
- (4)  $Z$  上の大小関係  $<$  との間で次を満たす：
  - $\forall a, b \in Z : a < b \iff \iota(a) < \iota(b)$

問 2-6C. 有理数全体の集合  $Q$  の構成は次のようにすることもできる。

- (1)  $X := Z \times (N \setminus \{0\})$  上に、前と同様な同値関係  $\sim$  を入れて、 $Q' := X / \sim$  とする。
- (2)  $\iota' : Z \rightarrow Q'$  も同様に定めて、 $Z \subset Q'$  と見る。
- (3) 加法・乗法も同様に定める。
- (4) 大小関係  $<$  は次で定めれば良い：
  - $a_1/b_1, a_2/b_2 \in Q'$  に対し、  
 $a_1/b_1 < a_2/b_2 \iff a_1 b_2 < a_2 b_1$   
 このようにして構成した  $Q'$  が、前問までに構成した  $Q$  と“同じ”であることを示せ。

### 3. $N$ から $Z$ へ

本節では、自然数全体の集合  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  についての基本的な性質 (演算・大小関係など) については既知 (既に基礎付け済み) であるが、整数全体の集合  $Z$  についてはここで構成するまで知らない、という立場で考えよ。

問 3-1B. 前節の  $Z$  から  $Q$  への構成に倣って、自然数全体の集合  $N$  から整数全体の集合  $Z$  を構成しよう。即ち、

- (1)  $X := N \times N$  上に次で定める関係  $\sim$  は同値関係である：
  - $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X$  に対し、 $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 + b_2 = a_2 + b_1$   
 $X$  の  $\sim$  による商集合  $X / \sim$  を  $Z$  と書く。
- (2)  $\iota : N \rightarrow Z$  を  $\iota(a) := \overline{(a, 0)}$  ( $\overline{(a, 0)} \in Z$  は  $(a, 0) \in X$  の属する同値類) で定めると、 $\iota$  は単射。(通常  $a \in N$  と  $\iota(a) \in Z$  とを同一視して  $N \subset Z$  と見る。)
- (3)  $Z$  の任意の元は、或る  $a \in N$  を用いて  $(a, 0)$  または  $(0, a)$  と書ける。 ( $-a := \overline{(0, a)}$  と書く。)

問 3-2C. 前節の  $Z$  から  $Q$  への構成に倣って、 $N$  上の加法  $+$ ・乗法  $\cdot$ ・大小関係  $<$  から、 $Z$  上の加法  $+$ ・乗法  $\cdot$ ・大小関係  $<$  を定義し、しかるべき性質を示せ。