## 4. PEANO の公理による $\boldsymbol{N}$ の基礎付け

本節では、自然数全体の集合 $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ については、ここで公理で規定されるまで知らない、という立場で考えよ。

集合 $\boldsymbol{N}$ とその元 $0 \in \boldsymbol{N}$ および写像 $s : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{N}$ の組 $(\boldsymbol{N}, 0, s)$ が、次の公理系（Peano の公理系）を満たすとする：

(1) $\forall n \in \boldsymbol{N} : s(n) \neq 0$
(2) $s$：単射（即ち、$\forall n, m \in \boldsymbol{N} : s(n) = s(m) \Longrightarrow n = m$）
(3) 部分集合 $S \subset \boldsymbol{N}$ に対して次が成り立つならば $S = \boldsymbol{N}$：
  (a) $0 \in S$
  (b) $\forall k \in S : s(k) \in S$
 （これは数学的帰納法の原理を公理化したものに他ならない。）

以下、$\boldsymbol{N}$ の元を自然数と呼ぶ。また、$n' := s(n)$ と書き、$n'$ を $n$ の後継・後続数・次などと呼ぶ。必要ならば、$1 := 0', 2 := 1'$ 等々と書く。

**問 4-1B.** 0 以外の自然数は或る自然数の後継である。即ち

- $\forall n \in \boldsymbol{N} : (n = 0$ または $\exists m \in \boldsymbol{N} : n = m')$

（ヒント：この条件を満たす自然数全体の成す集合を $S$ として、$S = \boldsymbol{N}$ を示せ。）

**問 4-2B.** $n \in \boldsymbol{N}$ に対し、次で（帰納的に）$S(n) \subset \boldsymbol{N}$ を定義し、$n$ の切片と呼ぶ：

- $S(0) := \{0\}$
- $S(n') := S(n) \cup \{n'\}$

このとき、次が成り立つ：

(1) $S(1) = \{0, 1\}, S(2) = \{0, 1, 2\}$ 等々
(2) $\forall n \in \boldsymbol{N} : S(n') = \{0\} \cup \{m' | m \in S(n)\}$
(3) $\forall n \in \boldsymbol{N} : n' \notin S(n)$

**問 4-3C.** 前問で定義した切片を用いて、$\boldsymbol{N}$ 上の関係 $\leq$ を次で定める：

- $a, b \in \boldsymbol{N}$ に対し、$a \leq b \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} a \in S(b)$

（また、便利のために関係 $\geq$ を $a \geq b \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} b \leq a$ で、関係 $<$ を $a < b \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} (a \leq b$ かつ $a \neq b)$ で定めておく。関係 $>$ もしかるべく定めよ。）

(1) このとき、次が成り立つ：
  (a) $\forall a \in \boldsymbol{N} : a \leq a$
  (b) $\forall a, b \in \boldsymbol{N} : a \leq b, b \leq a \Longrightarrow a = b$
  (c) $\forall a, b, c \in \boldsymbol{N} : a \leq b, b \leq c \Longrightarrow a \leq c$
(2) $\forall a, b \in \boldsymbol{N} : a \leq b \Longleftrightarrow a' \leq b'$
(3) $\forall a, b \in \boldsymbol{N} : (a \leq b$ または $b \leq a)$

**問 4-4B.** $\boldsymbol{N}$ 上の加法 $+$ を、次で（帰納的に）定義する：

- $n + 0 := n$
- $n + m' := (n + m)'$

このとき、次のようなしかるべき性質が成り立つことを示せ。

(1) $\forall a, b, c \in \boldsymbol{N} : (a + b) + c = a + (b + c)$
(2) $\forall a \in \boldsymbol{N} : 0 + a = a$
(3) $\forall a, b \in \boldsymbol{N} : a' + b = (a + b)'$
(4) $\forall a, b \in \boldsymbol{N} : a + b = b + a$
(5) $\forall a, b, c \in \boldsymbol{N} : a + c = b + c \Longrightarrow a = b$

**問 4-5C.** $\boldsymbol{N}$ 上の乗法 $\cdot$ を、次で（帰納的に）定義する：

- $n \cdot 0 := 0$
- $n \cdot m' := n \cdot m + n$

このとき、次のようなしかるべき性質が成り立つことを示せ。

(1) $\forall a, b, c \in \boldsymbol{N} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(2) $\forall a \in \boldsymbol{N} : 0 \cdot a = 0$
(3) $\forall a \in \boldsymbol{N} : 1 \cdot a = a$（ここに $1 := 0'$）
(4) $\forall a, b \in \boldsymbol{N} : a \cdot b = b \cdot a$

(5) $\forall a, b, c \in \boldsymbol{N} : (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$
(6) $\forall a, b, c \in \boldsymbol{N} : a\cdot c = b\cdot c, c \neq 0 \Longrightarrow a = b$

**問 4-6C.** $\boldsymbol{N}$ 上の加法 $+$ と大小関係 $\leq$ との間に、次が成り立つ：

- $n \leq m \Longleftrightarrow \exists k \in \boldsymbol{N} : n + k = m$

（従って、先に加法 $+$ を定義して、これで大小関係 $\leq$ を定義しても良かった。こちらを $\leq$ の定義として、上で示した $\leq$ の諸性質を証明してみよ。）

**問 4-7D.** $\boldsymbol{N}$ 上の冪 $n^m$ を、しかるべく帰納的に定義し、しかるべき性質を示せ。

## 5. $\varepsilon$-$\delta$ 論法

本節では、実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ についての基本的な性質（演算・大小関係など）については或る程度は素朴に知っているという上で、$\boldsymbol{R}$ における数列の収束について $\varepsilon$-$N$ 流に定式化する、という立場で考えよ。（「$\varepsilon$-$\delta$ 論法」とは、関数の収束の定式化において、習慣的に文字 $\varepsilon, \delta$ を用いることから来る呼び名であり、数列の収束の場合は、習慣的に文字 $\varepsilon, N$ を用いるので、「$\varepsilon$-$N$ 論法」と呼ぶべきかもしれないが、両者を包括して「$\varepsilon$-$\delta$ 論法」と呼ぶことが多いので、ここでは標題として「$\varepsilon$-$\delta$ 論法」を用いた。尚、数列の収束・極限においては（関数の極限と違って）「$n \longrightarrow \infty$ で」に決まっているので、以下ではこれを省略する。）

実数列の収束について以下で定義する：実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

- $a_n \longrightarrow \alpha \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \in \boldsymbol{N} : n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$
  （少し端折って、$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \geq N : |a_n - \alpha| < \varepsilon$ と書くことも多い。）
- $a_n \longrightarrow +\infty \overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \forall M \in \boldsymbol{R} : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \in \boldsymbol{N} : n \geq N \Longrightarrow a_n > M$
- $a_n \longrightarrow -\infty$ も同様（しかるべく定式化せよ）

実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、Cauchy 列（基本列）ということを次で定義する：

- $\boldsymbol{a}$ が Cauchy 列 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n, m \in \boldsymbol{N} : n, m \geq N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

また、実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、有界ということを次で定義する：

- $\boldsymbol{a}$ が有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists C > 0 : \forall n \in \boldsymbol{N} : |a_n| < C$
- $\boldsymbol{a}$ が上に有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists C \in \boldsymbol{R} : \forall n \in \boldsymbol{N} : a_n < C$
- $\boldsymbol{a}$ が下に有界 $\overset{\leftarrow}{\Longleftrightarrow} \exists C \in \boldsymbol{R} : \forall n \in \boldsymbol{N} : a_n > C$

**問 5-1A.** 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$a_n \longrightarrow \alpha$ でない（数列 $\boldsymbol{a}$ が $\alpha$ に収束しない）ということを、論理式で記述せよ。

**問 5-2B.** 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ が或る実数 $\alpha$ に収束するとき、$\boldsymbol{a}$ が Cauchy 列であることを示せ。

**問 5-3B.** 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$a_n \longrightarrow \alpha, b_n \longrightarrow \beta$ ならば、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} := (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$ で定める数列 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ について、$a_n + b_n \longrightarrow \alpha + \beta$ であることを示せ。

**問 5-4C.** 前問と同じ状況で、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := (a_n b_n)_{n=0}^{\infty}$ で定める数列 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ について、$a_n b_n \longrightarrow \alpha\beta$ であることを示せ。

**問 5-5A.** 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ が有界であることと、上に有界かつ下に有界であることとが同値であることを示せ。

**問 5-6B.** 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、

(1) $\boldsymbol{a}$ が収束するならば、有界であることを示せ。
(2) $a_n \longrightarrow \alpha > 0$ ならば、$\exists c > 0 : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \geq N : a_n > c > 0$ であることを示せ。

**問 5-7D.** 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$a_n \longrightarrow \alpha, b_n \longrightarrow \beta$ で $\beta \neq 0$ ならば、或る $N \in \boldsymbol{N}$ が存在して、$n \geq N$ なる $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_n/b_n$ が定義できて、$a_n/b_n \longrightarrow \alpha/\beta$ となることを示せ。

**問 5-8C.** 実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し、部分和の平均 $t_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_n$ によって定める数列 $\boldsymbol{t} = (t_n)_{n=1}^{\infty}$ を考える。

(1) $\boldsymbol{a}$ が有界ならば、$\boldsymbol{t}$ も有界であることを示せ。
(2) $a_n \longrightarrow \alpha$ ならば、$t_n \longrightarrow \alpha$ であることを示せ。