6. $\boldsymbol{Q}$ から $\boldsymbol{R}$ へ (1) Dedekind の切断

本節および次節では、有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ についての基本的な性質（演算・大小関係など）については既知（既に基礎付け済み）であるが、実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ についてはここで構成するまで知らない、という立場で考えよ。

$\boldsymbol{Q}$ の部分集合の対 (A, B) が次を満たすとき、$\boldsymbol{Q}$ の切断であるという：

- $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \boldsymbol{Q}, A \cap B = \emptyset$
- $\forall a \in A, \forall b \in B : a < b$

このとき、次の 3 つの場合がある：

(I) A には最大値がなく、B にも最小値がない
(II) A には最大値 $\max A$ が存在し、B には最小値がない
(III) A には最大値がなく、B には最小値 $\min B$ が存在する

本節の構成では、次で $\boldsymbol{R}$ を定める：

- $\boldsymbol{R} := \{(A, B) | \ \boldsymbol{Q}$ の切断で、type (I) または (II) $\}$

問 6-1A. $\boldsymbol{Q}$（に限らず、順序関係 $\leq$ が定義されている集合）の部分集合 S の最大値 $\max S$ および最小値 $\min S$ の定義を述べよ。（論理式を用いて満たすべき条件を書き下せ。）

問 6-2A. $\boldsymbol{Q}$ の有界な部分集合 S で最大値も最小値も持たないものの例を挙げよ。

問 6-3B. $\boldsymbol{Q}$ の切断で type (II) のものと type (III) のものとは一対一に対応する。（上の $\boldsymbol{R}$ の構成では、$\boldsymbol{R}$ 内の有理数に対応する。）

問 6-4B. $\boldsymbol{Q}$ の切断で type (I) であるものの例を挙げよ。

問 6-5B. 有理数 $c \in \boldsymbol{Q}$ に対応する type (II) の切断を自然に定めることにより、単射 $\iota : \boldsymbol{Q} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を定めよ。（これにより $c \in \boldsymbol{Q}$ と $\iota(a) \in \boldsymbol{R}$ とを同一視して $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ と見る。）

問 6-6B. $\boldsymbol{Q}$ の切断（即ち $\boldsymbol{R}$ の元）の間に、大小関係 $\leq$ を次で定める：

- $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \boldsymbol{R}$ に対し、$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \overset{\leftarrow}{\iff} A_1 \subset A_2 (\iff B_1 \supset B_2)$

(1) このとき、次が成り立つ：
  (a) $\forall x \in \boldsymbol{R} : x \leq x$
  (b) $\forall x, y \in \boldsymbol{R} : x \leq y, y \leq x \Longrightarrow x = y$
  (c) $\forall x, y, z \in \boldsymbol{N} : x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

(2) $\boldsymbol{Q}$ 上の大小関係 $\leq$ との間で次を満たす：
  - $\forall a, b \in \boldsymbol{Q} : a \leq b \iff \iota(a) \leq \iota(b)$

問 6-7C. （順序に関する $\boldsymbol{R}$ 内での $\boldsymbol{Q}$ の稠密性）$x_1 = (A_1, B_1), x_2 = (A_2, B_2) \in \boldsymbol{R}$ に対し、$x_1 < x_2$ ならば、或る $c \in \boldsymbol{Q}$ が存在して $x_1 < c < x_2$ となることを示せ。

問 6-8C. $\boldsymbol{R}$ の切断には type (I) がないこと（すなわち type (II) または (III) であること）を示せ。

問 6-9D. $\boldsymbol{R}$ に加法 $+$ および乗法 $\cdot$ を自然に定義し、諸々の良い性質が成り立つことや、上で定めた大小関係と同調することを示せ。

7. $\boldsymbol{Q}$ から $\boldsymbol{R}$ へ (2) Cauchy 列の類別

$\boldsymbol{Q}$ 内の Cauchy 列全体の成す集合を $\mathcal{C}$ とし、$\mathcal{C}$ 上の関係 $\sim$ を次で定めると同値関係である：

- $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ に対し、
  $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} \overset{\leftarrow}{\iff} a_n - b_n \longrightarrow 0$
  $(\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \in \boldsymbol{N} : n \geq N \Longrightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon)$

本節の構成では、次で $\boldsymbol{R}$ を定め、$\boldsymbol{a} \in \mathcal{C}$ の属する同値類を $\overline{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{R}$ と書く：

- $\boldsymbol{R} := \mathcal{C} / \sim$

問 7-1B. 上で定めた $\mathcal{C}$ 上の関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ。

問 7-2B. $\iota : \boldsymbol{Q} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $\iota(a) := \overline{(a, a, a, \ldots)}$ で定めると、ι：単射。（これにより $c \in \boldsymbol{Q}$ と $\iota(a) \in \boldsymbol{R}$ とを同一視して $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ と見る。）

問 7-3B.　一般に列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ に対し、（狭義）単調増加な自然数列 $(k_n)_{n=0}^{\infty}$（即ち、$k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$）によって定まる列 $(a_{k_n})_{n=0}^{\infty} = (a_{k_0}, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots)$ を $\boldsymbol{a}$ の部分列という。$\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$ に対し、その任意の部分列 $\boldsymbol{a}'$ も $\boldsymbol{a}' \in \mathcal{C}$ であり、かつ $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{a}'$ であることを示せ。

問 7-4B.　$\boldsymbol{R}$ 上の加法 $+$ について、

(1) $\mathcal{C}$ の加法 $+$ を次で定めると well-defined：
- $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$ に対し、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$

（ここでの well-defined とは、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{C}$ に対し、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathcal{C}$ ということ。）

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の加法 $+$ を次で定めると well-defined：
- $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{R}$ に対し、$\overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}} := \overline{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}$

（ここでの well-defined とは、代表元の取り方に依らないということ。）

(3) 上で定めた $\boldsymbol{R}$ 上の加法 $+$ は、（$\boldsymbol{Q}$ 上の加法 $+$ で成り立つような）しかるべき良い性質を満たす。

問 7-5C.　$\boldsymbol{R}$ 上の乗法 $\cdot$ について、

(1) $\mathcal{C}$ の乗法 $\cdot$ を次で定めると well-defined：
- $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$ に対し、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := (a_n \cdot b_n)_{n=0}^{\infty}$

（ここでの well-defined とは、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{C}$ に対し、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in \mathcal{C}$ ということ。Cauchy 列が有界であることを用いると良い。）

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の乗法 $\cdot$ を次で定めると well-defined：
- $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{R}$ に対し、$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} := \overline{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}$

（ここでの well-defined とは、代表元の取り方に依らないということ。）

(3) 上で定めた $\boldsymbol{R}$ 上の乗法 $\cdot$ は、（$\boldsymbol{Q}$ 上の乗法 $\cdot$ で成り立つような）しかるべき良い性質を満たす。（本問では乗法 $\cdot$ の逆演算（除法）に関するもの以外に留める。）

問 7-6D.　$\boldsymbol{R}$ の大小関係について、

(1) $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}$ について、次のいづれか一つ、しかも一つだけが成り立つ：
- (I) $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{0} := (0, 0, 0, \ldots)$（即ち $\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{0}} = \iota(0)$）
- (II) $\exists c \in \boldsymbol{Q} : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \geq N : a_n > c > 0$
- (III) $\exists c \in \boldsymbol{Q} : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \geq N : a_n < c < 0$

(2) $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{a}'$（即ち $\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{a}'}$）ならば、上のうちでどれが成り立つかが一致することを示せ。

(3) $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{R}$ に対し、次で関係 $<, >$ を定めると well-defined である：
- $\overline{\boldsymbol{a}} < \overline{\boldsymbol{b}} \overset{\leftarrow}{\iff} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ が type(III)
- $\overline{\boldsymbol{a}} > \overline{\boldsymbol{b}} \overset{\leftarrow}{\iff} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ が type(II)

(4) 上で定めた $\boldsymbol{R}$ 上の関係 $<, >$ は次を満たす：
- (a) $\forall x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し $x < y, x = y, x > y$ のうち一つ、かつ一つのみが成り立つ。
- (b) $\forall x, y, z \in \boldsymbol{R} : x < y, y < z \Longrightarrow x < z$

(5) この関係は $\boldsymbol{R}$ 上の演算と同調する。即ち、
- (a) $\forall x, y, z \in \boldsymbol{R} : x < y \Longrightarrow x + z < y + z$
- (b) $\forall x, y, z \in \boldsymbol{R} : x < y, z > 0 \Longrightarrow x \cdot z < y \cdot z$

(6) $\boldsymbol{Q}$ 上の大小関係 $<$ との間で次を満たす：
- $\forall a, b \in \boldsymbol{Q} : a < b \iff \iota(a) < \iota(b)$

問 7-7C.　$\overline{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{R}$ に対し、$\overline{\boldsymbol{a}} > 0$ ならば、或る $c \in \boldsymbol{Q}$ に対し、$0 < c < \overline{\boldsymbol{a}}$ となることを示せ。

問 7-8D.　$\overline{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{R}$ に対し、$\overline{\boldsymbol{a}} \neq \overline{\boldsymbol{0}}$ ならば、$\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}} = \overline{\boldsymbol{1}} (= \iota(1))$ となる $\overline{\boldsymbol{b}} \in \boldsymbol{R}$ が存在することを示せ。

問 7-9D.　$\boldsymbol{Q}$ 内の数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$a_n \longrightarrow \alpha \in \boldsymbol{Q}$ であるとき、$\boldsymbol{R}$ 内でも $\iota(a_n) \longrightarrow \iota(\alpha)$ となることを示せ。

問 7-10D.　（距離に関する $\boldsymbol{R}$ 内での $\boldsymbol{Q}$ の稠密性）$\overline{\boldsymbol{a}} \in \boldsymbol{R}$ および $\varepsilon > 0$ に対し、或る $c \in \boldsymbol{Q}$ が存在して $|\overline{\boldsymbol{a}} - c| < \varepsilon$ となることを示せ。

問 7-11D.　$\boldsymbol{R}$ 内の Cauchy 列は、$\boldsymbol{R}$ 内で収束することを示せ。