8. $\boldsymbol{R}$ を規定する公理たち

本節では、実数全体の成す順序体 $\boldsymbol{R}$ を、有理数全体の成す順序体 $\boldsymbol{Q}$ を含み所定の公理を満たすものとして定式化する、という立場で考える。

有理数全体の成す順序体 $\boldsymbol{Q}$ を含む順序体 R に対し、次は同値である：

(1) （Dedekind の公理）R の切断 (A, B) には、$\max A, \min B$ のどちらかが存在する。
(2) （上限の存在）R の空でない部分集合 X が上に有界ならば、上限 $\sup X$ が存在する。
(3) （有界単調数列の収束）R 内の上に有界な単調非減少数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ は、（その上限に）収束する。
(4) （上極限の存在）R 内の有界な数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、上極限 $\limsup_{n\to\infty} a_n$ が存在する。
(5) （Bolzano-Weierstrass の原理）R 内の有界な数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、集積点が存在する。
(6) （Archimedes の原理）任意の正数 $\varepsilon, M > 0$ に対し、自然数 $N \in \boldsymbol{N}$ が存在して、$N\varepsilon > M$ となる。+（縮小区間列の原理）R 内の閉区間の列 $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ が縮小区間列ならば、$\bigcap_{n\geq 0} I_n$ は丁度 1 点のみから成る。
(7) （Archimedes の原理）+（Cauchy 列の収束）R 内の Cauchy 列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ は、或る $\alpha \in R$ に収束する。（このとき R は完備であるという。）

$\boldsymbol{Q}$ を含み上のいずれか（従って全て）を満たす順序体は、自然な同型を除いて一意的である。即ち、R, R' がともに条件を満たすとするとき、順序体の構造を保つ全単射 $\varphi : R \longrightarrow R'$ で、$\boldsymbol{Q}$ 上では恒等写像であるものが一意的に存在する。そこで、この同型を除いて定まる順序体を実数体と呼んで $\boldsymbol{R}$ と書き、その元を実数という。

以下、R を $\boldsymbol{Q}$ を含む順序体（または素朴に知っている実数体 $\boldsymbol{R}$）とし、上に現れた用語の定義を述べながら、問を挙げる。

問 8-1A. 任意の $a \in R$ に対し、或る $c \in R$ が存在して $a < c$ となる。また、任意の $a, b \in R$ に対し、$a < b$ ならば、或る $c \in R$ が存在して $a < c < b$ となる。

問 8-2A. $a \in R$ に対し、$\forall \varepsilon > 0 : a < \varepsilon$ ならば $a \leq 0$ である。特に、$\forall \varepsilon > 0 : |a| < \varepsilon$ ならば $a = 0$ である。

問 8-3A. R の部分集合 M の最小の上界を上限といい、$\sup M$ と書く。$x = \sup M$ であることは次で特徴づけられる：

(1) $\forall m \in M : m \leq x$
(2) $\forall \varepsilon > 0 : \exists m \in M : x - \varepsilon < m$

問 8-4A. R の部分集合 M の下限 $\inf M$ について同様のことを考えよ。

問 8-5A. R の部分集合 M に最大値 $\max M$ が存在すれば、それは上限 $\sup M$ でもある。最小値・下限についても同様。

問 8-6A. $\boldsymbol{R}$ の次の部分集合の最大値・最小値・上限・下限は存在するか。存在するならその値は何か。

(1) 閉区間 $I = [a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x \leq b\}$
(2) 開区間 $I = (a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x < b\}$
(3) 無限閉区間 $I = [a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leq x\}$
(4) 無限開区間 $I = (a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x\}$

問 8-7B. $\boldsymbol{R}$ の区間について次が成り立つ：

(1) $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon>0} [a+\varepsilon, b-\varepsilon] = (a, b)$　　(2) $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} (a-\varepsilon, b+\varepsilon) = [a, b]$

問 8-8B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ については、その値のなす集合 $\{a_n | n \in \boldsymbol{N}\}$ の上限を $\boldsymbol{a}$ の上限といい、ここでは、以下、単に $\sup \boldsymbol{a}$ と書くことにする。数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}, \boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ について、$\sup \boldsymbol{a}, \sup \boldsymbol{b}$ が共に存在するとき、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$ で定める数列 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ について、$\sup(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \leq \sup \boldsymbol{a} + \sup \boldsymbol{b}$ であることを示せ。また、等号が成り立たない例を挙げよ。

問 8-9B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ において、各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $b_n := \sup\{a_m | m \geq n\}$ が存在するとき、数列 $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ は単調非増加、即ち $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ （広義単調減少ともいう。ここでは以下、これを単に単調減少ということにする。）であり、この $\boldsymbol{b}$ の下限 $\inf \boldsymbol{b}$ を、数列 $\boldsymbol{a}$ の上極限と言って、$\limsup_{n\to\infty} a_n, \overline{\lim}\, a_n, \limsup \boldsymbol{a}$ 等と書く。

(1) 上極限は次の性質で特徴付けられることを示せ：$x = \limsup_{n\to\infty} a_n \Longleftrightarrow$

- $\forall \varepsilon > 0 : \forall n \in \boldsymbol{N} : \exists m > n : a_m > x - \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \boldsymbol{N} : \forall m > n : a_m < x + \varepsilon$

(2) 下極限 $\liminf_{n\to\infty} a_n, \underline{\lim}\, a_n, \liminf \boldsymbol{a}$ も同様に定義せよ。また、上のような特徴付けを書いてみよ。

問 8-10B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ について、上極限・下極限がともに存在して一致すれば、$\boldsymbol{a}$ はその値に収束することを示せ。

問 8-11A. 次で定まる実数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ の上極限・下極限は何か。

(1) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ (2) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$ (3) $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$

問 8-12B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ において、α が次の性質を満たすとき $\boldsymbol{a}$ の集積値（の一つ）であるという：

- $\forall \varepsilon > 0 : \forall N \in \boldsymbol{N} : \exists m > N : |a_m - \alpha| < \varepsilon$

（これは、α から距離 ε 以内に無限個の a_n がある、ということと同じである。）

(1) 集積値が複数ある実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。
(2) 集積値が無限個ある実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。
(3) $\boldsymbol{a}$ の上極限が存在すれば、それは最大の集積値であることを示せ。（下極限についても同様。）
(4) $\boldsymbol{a}$ が収束すれば、その極限は唯一の集積値であることを示せ。
(5) 集積値がただ一つであっても収束しない実数列 $\boldsymbol{a}$ の例を挙げよ。

問 8-13B. 数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ に対し、単調増加な自然数列（番号列）$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ を用いて、$(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ で定まる数列を $\boldsymbol{a}$ の部分列という。Bolzano-Weierstrass の原理は次のようにも言い換えられる：

- R 内の有界な数列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ には、収束部分列が存在する。

問 8-14B. 順序体 R における Archimedes の原理は次の各々と同値であることを示せ：

(1) 自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ が R 内で上に有界でない。
(2) $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$
（注：これは ε-δ 流でちゃんと書くと、$\forall M \in R : \exists N \in \boldsymbol{N} : \forall n \in \boldsymbol{N} : n > N \Longrightarrow n > M$ ということ（任意の R の元 M に対して然るべき $\boldsymbol{N}$ の元 N の存在を主張）であるから、決して単なる同語反復的命題ではない。）
(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

問 8-15B. 縮小区間列の原理では、各区間 $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n \leq x \leq b_n\}$ が閉区間であることが重要である。実数の開区間の縮小列 $I_n = (a_n, b_n) = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n < x < b_n\}$ で、$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \emptyset$ となる例を挙げよ。また、半開区間と呼ばれる $[a_n, b_n) = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n \leq x < b_n\}$（または、$(a_n, b_n] = \{x \in \boldsymbol{R} | a_n < x \leq b_n\}$）の形の区間列ではどうか。

問 8-16B. 通常の十進小数表記で与えられた実数 $\alpha = d_0.d_1d_2d_3\cdots$ （$d_0 \in \boldsymbol{Z}$ で $d_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ は小数第 n 位の数値、簡単のため $d_0 \geq 0$ と考えて良い）に対し、

(1) 有理数 $a_n, b_n \in \boldsymbol{Q}$ を端点とする縮小区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ で、$\bigcap_{n\geq 0} I_n = \{\alpha\}$ となるものの例を挙げよ。
(2) α に収束する有理 Cauchy 列 $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ $(a_n \in \boldsymbol{Q})$ の例を挙げよ。

問 8-17D. Archimedes の原理が成立しない順序体の例を挙げよ。更にその中で、完備（Cauchy 列が必ず収束する）な例を挙げよ。